This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Verlag von **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

Kohlrausch, Dr. **F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Leitfaden der praktischen Physik, mit einem Anhange: das absolute Maass-System. Mit in den Text gedruckten Figuren. Achte, vermehrte Auflage. [XXIV u. 492 S.] gr. 8. 1896. In biegsamen Leinwandband geb. n. ℳ 7.—

Im Verlaufe von 24 Jahren seit dem ersten Erscheinen, in denen der Inhalt des Leitfadens sich reichlich verdreifacht hat, sind auch die Zwecke erweitert worden. Das Buch galt ursprünglich dem physikalischen Übungspraktikum, an dessen Wiege es entstanden war, und soll ihm noch gelten. Es sucht der Absicht gerecht zu werden, dafs der Praktikant das Material finden soll, dessen er neben dem in der Vorlesung Gelernten zum Verständnis seiner Aufgabe bedarf, und giebt den Weg zu ihrer Ausführung im allgemeinen an. In letzterer Hinsicht aber wird ein thunlichst weiter Spielraum gelassen, und zwar nicht nur um der speziellen Einrichtung der verschiedenen Übungslaboratorien nicht vorzugreifen, sondern ebenso um dem Arbeitenden das für das Lernen notwendige Mafs der geistigen Selbstthätigkeit zu lassen.

Neben den Zwecken des Praktikums ist immer mehr auch das Bedürfnis der wissenschaftlichen Messung berücksichtigt worden. Die über das Übungspraktikum hinübergreifenden Aufgaben oder Methoden sind im allgemeinen kürzer gefafst. Für genauere Arbeiten sind Hinweise auf Litteratur in gröfserer Anzahl aufgenommen worden.

I ... vermehrt. Die Technik ... g hoher Tempe- raturen u ... sformatoren, die Bestimm ... lisch-chemische Methoden ... re Kapitel, be- sonders ... r beträchtlicher Vermehr ...

I ... st und vielfach ergänzt. ... ngskoeffizienten verschied ...

Cornel ... senschaft. [X ... ℳ 10.—

Föppl, ... Hochschule zu ... zu Leipzig, Ei ... Elektricit ... echnen mit Vectorgrössen in der Physik. Mit Figuren im Texte. [XVI u. 413 S.] gr. 8. 1894. geh. n. ℳ 10.—

——— die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwell'sche Theorie der Elektricität und zu dessen Ergänzung. [X u. 108 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 3.60.

——— Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. III. Band: Festigkeitslehre. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 472 S.] gr. 8. In Leinw. geb. n. ℳ. 12.—

Holzmüller, Dr. **Gustav**, Direktor der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. Zweiter Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektricität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über Mafseinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

University of Wisconsin
Library
CLASS SD
BOOK F73L
T

Januschke, Hans, k. k. Direktor der Staats-Oberrealschule in Teschen, das Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Mit 95 Figuren im Text. [X u. 456 S.] gr. 8. 1897. In Leinwand gebunden n. *M.* 12.—

Kirchhoff, Dr. **Gustav,** weil. Professor der Physik an der Universität zu Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. 4 Bände. Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. n. *M.* 39.—

Einzeln:

I. Band. Mechanik. 4. Auflage, von Prof. Dr. W. Wien, Docent an der technischen Hochschule in Aachen. [X u. 464 S.] 1897. n. *M.* 13.—

II. — Optik. Herausgegeben von Dr. Kurt Hensel, Privatdocent der Mathematik an der Universität zu Berlin. Mit dem Bildnisse Kirchhoff's. [VIII u. 272 S.] 1891. n. *M.* 10.—

III. — Theorie der Electricität und des Magnetismus. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität zu Berlin. [X u. 228 S.] 1891. n. *M.* 8.—

IV. — Theorie der Wärme. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität zu Berlin. [X u. 210 S.] 1894. n. *M.* 8.—

Koenigsberger, Dr. **Leo,** ord. Prof. an der Universität zu Heidelberg, Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Mit einem Bildnis Hermann von Helmholtz's nach einer Ölskizze von Franz von Lenbach vom 30. April 1894. [V u. 58 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.40.

Neumann, Dr. **Carl,** ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, die elektrischen Kräfte. Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorieen. 2 Theile. gr. 8. geh. n. *M.* 21.20.

Einzeln:

I. Theil. Die durch die Arbeiten von A. Ampère und F. Neumann angebahnte Richtung. [XV u. 272 S.] 1873. n. *M.* 7.20.

II. — Ueber die von Hermann v. Helmholtz in seinen älteren und in seinen neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. [XXXVIII u. 462 S.] 1898. n. *M.* 14.—

——— allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. [XXI u. 292 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 10.—

——— Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik, insbesondere zur Elektrodynamik und Hydrodynamik, Elektrostatik und magnetischen Induction. Mit Figuren im Text. [IX u. 314 S.] gr. 8. 1893. geh. n. *M.* 10.—

——— die Haupt- und Brenn-Punkte eines Linsen-Systemes. Elementare Darstellung der durch Gauss, Möbius und Bessel begründeten Theorie. Mit Figuren im Text. Zweite Auflage. [VIII u. 42 S.] gr. 8. 1893. geh. n. *M.* 1.20.

Neumann, Dr. **Carl**, ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, einige Notizen hinsichtlich der in neuerer Zeit gegen die Gesetze von Ampère und Weber erhobenen Einwände. Separat-Abdruck aus dem XI. Bande der Mathematischen Annalen. [S. 309—340.] gr. 8. 1877. geh. n. *M.* 1.20.

Planck, Dr. **Max**, Professor an der Universität zu Kiel, das Princip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Facultät Göttingen preisgekrönt. [XIII u. 247 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M.* 6.—

Plücker, **Julius**, gesammelte physikalische Abhandlungen, herausgegeben von Fr. Pockels. Mit 78 in den Text gedruckten Figuren und 9 lithogr. Tafeln. [XVIII u. 834 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 30.—

Steinheil, Dr. **Adolph**, Inhaber der Firma C. A. Steinheil Söhne und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in München, und Dr. **Ernst Voit**, Professor an der technischen Hochschule zu München, Handbuch der angewandten Optik. 3 Bände. I. Band. Voraussetzung für die Berechnung optischer Systeme und Anwendung auf einfache und achromatische Linsen. Mit in den Text gedruckten Figuren und 7 lithographierten Tafeln. [VI u. 314 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 12.—

Tumlirz, Dr. **O.**, Professor an der Universität in Czernowitz, die electromagnetische Theorie des Lichtes. [VIII u. 158 S. mit in den Text gedruckten Figuren.] gr. 8. 1883. geh. n. *M.* 3.60.

Volkmann, **P.**, Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i/Pr., Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Unter Rücksicht auf die elastische und die elektromagnetische Anschauung. Mit in den Text gedruckten Figuren. [XVI u. 432 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 11.20.

——— erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 6.—

Wüllner, Dr. **Adolph**, Geheimer Regierungsrath und Professor der Experimentalphysik an der Königlichen Technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [X u. 1000 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 12.—

——— ——— II. Band. Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—

——— ——— III. Band. Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen u. Figuren. [XV u. 1415 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 18.—

Leitfaden

und

Aufgabensammlung für den Unterricht

in der

angewandten Mechanik.

Von

A. Föppl,
Ing., Dr. phil.,
Oberlehrer a. d. städt. Gewerbeschule in Leipzig.

Erstes Heft.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1890.

59003
JUL 25 1901
SD
F73L
1
6108731

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Erster Abschnitt. Mechanik des materiellen Punktes. I.	1—40
Erstes Kapitel. Bewegungslehre des materiellen Punktes	1—14
Gleichförmige Bewegung	2
Geschwindigkeitsdiagramm	5
Formeln für die gleichförmig veränderte Bewegung	9
Relative Bewegung	11
Graphische Summe	13
Zweites Kapitel. Die Kräfte und deren Zusammensetzung	14—29
Trägheit	14
Aktion und Reaktion	15
Einteilung der Kräfte	16
Kräfteeinheit	20
Masse	21
Parallelogramm der Kräfte	24
Erster Hauptlehrsatz	27
Drittes Kapitel. Projektionen, Momente und Arbeiten der Kräfte	29—40
Zweiter Hauptlehrsatz	30
Dritter Hauptlehrsatz	34
Arbeitsdiagramm	37
Vierter Hauptlehrsatz	39
Zweiter Abschnitt. Mechanik der starren Körper. I.	40—62
Erstes Kapitel. Die vier Hauptlehrsätze für starre Körper	40—53
Pol und Polbahnen	42
Resultierende am starren Körper	44
Zwei Kräfte von entgegengesetzter Richtung und Größe	49
Zweites Kapitel. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte an starren Körpern	53—58
Verschiebung des Angriffspunktes	54
Parallele Kräfte, Seilpolygon	55
Kräftepaare	56
Drittes Kapitel. Mittelpunkt paralleler Kräfte	58—62
Guldin'sche Regel	62

Seite

Dritter Abschnitt. Die Maschinen . . . . . 63—101
Erstes Kapitel. Kinematik der Maschinen . . . . . 63—67
Niedere Elementenpaare 64
Paarschluß und Kraftschluß 66
Zweites Kapitel. Die mechanischen Potenzen . . . . . 67—85
Hebel und Wellrad 68
Reibung 69
Feste Rolle 73
Lose Rolle 74
Keil 77
Schraube 79
Drittes Kapitel. Zusammengesetzte Maschinen . . . . . 85—101
Hebelverbindungen 85
Gleicharmige Wage 86
Dezimalwage 88
Kniehebel 89
Wellradverbindungen 91
Winde 97
Flaschenzug 99
Bremsdynamometer 100
Vierter Abschnitt. Die Festigkeitslehre . . . . . 101—139
Erstes Kapitel. Allgemeine Gesetze der Elastizität und Festigkeit . . . . . 101—108
Elastizitätsgesetz 104
Festigkeitsdiagramm 106
Zweites Kapitel. Zug-, Druck- und Schubfestigkeit . . . 108—119
Centrische Belastung 109
Röhren unter innerem Druck 110
Stangenkopf 112
Exzentrische Belastung 116
Navier'sche Regel 116
Druck im Mauerkörper 118
Drittes Kapitel. Biegungsfestigkeit . . . . . 119—133
Formel für rechteckigen Querschnitt 122
Schubspannungen 125
Allgemeine Formel 128
Seilpolygon als Momentenfläche 132
Viertes Kapitel. Torsions- und Knickfestigkeit . . . . . 134—139
Allgemeine Formel für Torsion 135
Euler'sche Formel 138
Tabellen. a) Spezifische Gewichte, b) Reibungscoeffizienten, c) Festigkeitscoeffizienten . . . . . 139—140

Erster Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes. I.

Erstes Kapitel.

Bewegungslehre des materiellen Punktes.

1. Begriff des materiellen Punktes. Unter dem materiellen Punkte (abgekürzt: mat. P.) versteht man in der Mechanik dasselbe, was man in der Chemie Atom oder Molekül nennt: den möglichst kleinen, nicht weiter teilbaren (daher der Name Atom) Teil der Materie. Man kann auch sagen: Ein mat. P. ist ein geometrischer Punkt, der mit Materie behaftet ist. — Materie ist das, was die Körper aufbaut und braucht nicht weiter erklärt zu werden. Von der chemischen Beschaffenheit der Materie wird in der Folge ganz abgesehen. — Aus der Art, wie sich die benachbarten mat. P. eines Körpers gegeneinander verhalten, folgen die physikalischen Eigenschaften des Körpers (Aggregatzustand, Festigkeit, Elastizität u. s. w.).

2. Absolute Bewegung des mat. P. Bleibt ein mat. P. fortwährend an demselben Orte des Raumes, so befindet er sich im Zustande der Ruhe; wechselt er den Ort, so ist er in Bewegung, er bewegt sich. Aus der Erfahrung (a posteriori) und auch durch Nachdenken allein (a priori) erkennt man, daß diese Bewegung nur kontinuierlich (zusammenhängend) sein kann, d. h. der mat. P. kann von einem Punkte des Raumes zu einem beliebigen anderen nur dadurch gelangen, daß er eine Reihe stetig aufeinander folgender Zwischenlagen durchläuft. Auch bedarf er stets zum Durchlaufen dieser Zwischenreihe, welche die Bahn des mat. P. genannt wird, einen gewissen, wenn auch noch so kleinen Zeitaufwand.

Diese Eigenschaft der Materie, sich nur kontinuierlich bewegen zu können, ist eines der wichtigsten Merkmale des Begriffes der Materie oder des Körpers.

3. Hinsichtlich der Art der Bewegung des mat. P. bildet die **Gestalt der Bahn** den ersten Einteilungsgrund. Man unterscheidet danach geradlinige und krummlinige Bewegung. Ist die Bahn ein Kreis, eine Ellipse, Parabel, Schraubenlinie u. s. w., so wird die Bewegung eine kreisförmige, elliptische, parabolische, schraubenförmige u. s. w. genannt. Bildet die Bahn irgend eine ebene Kurve, so wird die Bewegung auch eine ebene genannt. Es wird später dargethan werden, daß die Bahn eines mat. P. niemals eine gebrochene Linie sein kann.

4. **Die Zeit.** Von Wichtigkeit ist es ferner, zu wissen wieviel Zeit verfließt, während der mat. P. seine Bahn durchläuft.

Das Messen der Zeit, welche während einer gewissen Bewegung verstreicht, beruht einfach auf einer Vergleichung zweier Bewegungen mit einander, nämlich der Bewegung des betrachteten mat. P. mit der kosmischen Bewegung der Erde. Wie man immer nur gleichartige Dinge mit einander hinsichtlich ihrer Größe vergleichen kann, so auch hier. Sagt man z. B. ein Punkt habe eine Sekunde Zeit gebraucht, um seine Bahn zu durchlaufen, so wird damit ausgesagt: Während der Punkt seine Bewegung ausführte, drehte sich gleichzeitig die Erde um den 86 400. Teil einer Umdrehung weiter.

Durchlaufen zwei mat. P. Bahnen von gleicher Länge in verschiedener Zeit, so wird die Bewegung jenes mat. P. die schnellere von beiden genannt, die weniger Zeit erfordert.

5. **Gleichförmige Bewegung.** Durchläuft ein mat. P. seine Bahn derart, daß er in der Hälfte der Zeit die Hälfte der Bahn, in ein Drittel oder $\frac{1}{n}$ der ganzen Zeit ein Drittel oder $\frac{1}{n}$ der ganzen Bahn zurücklegt, so wird die Bewegung eine gleichförmige genannt. (Die Gestalt der Bahn ist hierbei gleichgültig.) In jeder Sekunde legt er dieselbe Länge zurück.

6. Unter der **Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung** versteht man die Zahl, welche angiebt, wie viel Längeneinheiten in der Zeiteinheit durchlaufen werden. Auf welche dieser Einheiten sich die betr. Angabe bezieht, muß in jedem Falle ersichtlich gemacht werden.

Z. B. Geschwindigkeit eines Schnellzuges $= 20^{m}$ pro Sek. oder $= 72^{km}$ pro Stunde.

Anm. Die Betrachtungen über den materiellen Punkt dürfen auf einen ganzen Körper ohne weiteres übertragen werden, wenn jeder mat. P. dieses letzteren sich in gleichem Bewegungszustande befindet.

7. Die Geschwindigkeit wird in der Mechanik gewöhnlich mit v (velocitas) bezeichnet, der Weg, den der Punkt zurücklegte mit s (spatium) und die Zeit, welche er dazu brauchte mit t (tempus). Nach den gegebenen Erklärungen gilt für die gleichförmige Bewegung die Beziehung

$$s = v.t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

aus der sich eine dieser 3 Größen bestimmen läßt, wenn die beiden anderen gegeben sind.

Aufg. 1. Welchen Weg legt das Wasser eines Flusses in einem Tage zurück, wenn die Geschwindigkeit 1) 1^{m}; 2) $2{,}25^{m}$; 3) a^{m} pro Sek. beträgt?

Aufg. 2. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Spitze des großen Zeigers einer Uhr, wenn die Länge des Zeigers 10^{cm} beträgt; wie groß die Geschwindigkeit der Spitze des kleinen Zeigers, wenn dessen Länge $= r$ ist?

Aufg. 3. Die Erde dreht sich in 24 Stunden einmal um ihre Achse. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes des Äquators infolge dieser Umdrehung (ausgedrückt in m pro Sek.), wenn der Erdradius $= 6377^{km}$; (für Vorgeschrittenere:) wie groß ist diese Geschwindigkeit für einen unter 50^{0} n. Br. gelegenen Ort der Erdoberfläche?

8. **Rotation.** Man sagt von einem Körper er rotiere, wenn jeder mat. P. desselben eine kreisförmige Bahn beschreibt. Diese Bewegung ist eine sehr wichtige; hier haben wir uns nur mit einem dieser mat. P. zu beschäftigen. Ist die Bewegung eine gleichförmige (§ 5), so sprechen wir von einer gleichförmigen Rotation.

Beisp. f. d. Rot.: Zahnräder, Schwungräder, Drehung der Erde um ihre Achse, Hebel ꝛc.

9. Unter der **Winkelgeschwindigkeit der gleichförmigen Rotation** versteht man die Zahl, welche angiebt, um wieviel Winkeleinheiten sich der zum bewegten mat. P. gehörige Radius während der Zeiteinheit weiter dreht. Auf welche dieser Einheiten sich die Angabe bezieht, ist in jedem Falle zu bemerken. Als Winkeleinheit

wird entweder der Grad ($90^0 = 1$ R) oder die Umdrehung oder Tour als höhere Einheit ($= 360^0$) benutzt.

10. Die Winkelgeschwindigkeit sei in der Folge mit u bezeichnet, der Winkelweg (Anzahl Grade oder Umdrehungen, die im Ganzen durchlaufen wurden) mit w. Dann besteht die der Gl. (1) entsprechende Beziehung

(2) . . . . . $w = u\,.\,t.$

Anm. Wenn ein Körper rotiert, durchläuft jeder mat. P. desselben seine kreisförmige Bahn ebenso oft als jeder andere. Sie haben daher alle gleiche Winkelgeschwindigkeit und diese wird auch die Winkelgeschwindigkeit des Körpers genannt. Unter Umfangsgeschwindigkeit eines rotierenden cylindrischen Körpers, z. B. einer Maschinenwelle, versteht man die Geschwindigkeit im gewöhnlichen Sinne (§ 6), die ein Punkt des Umfangs besitzt.

Aufg. 4. Eine Maschinenwelle von 15 cm Durchmesser hat eine Geschwindigkeit von 50 Touren pro Minute; wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit ausgedrückt in m pro Sek.?

11. Mittlere Geschwindigkeit. Erfolgt die Bewegung eines mat. P. nicht gleichförmig, so versteht man unter mittlerer Geschwindigkeit desselben die Zahl, welche angiebt, wie viel Längeneinheiten (m) derselbe durchschnittlich in der Zeiteinheit (Sek.) zurückgelegt hat. Bezeichnet man die mittlere Geschwindigkeit mit v_m, so ist hiernach

(3) . . . . . $v_m = \frac{s}{t}$.

Beisp. Ein frei fallender Körper durchfällt in der ersten Sekunde etwa $4{,}9^m$, seine mittlere Geschwindigkeit während dieser Bewegung ist demnach $= 4{,}9^m$ pro Sek. Für die Bewegung in der ersten Hälfte der ersten Sekunde ist die mittlere Geschwindigkeit kleiner, in der zweiten Hälfte größer.

12. Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung. Bei der Betrachtung der ungleichförmigen Bewegung genügt häufig die Angabe der mittleren Geschwindigkeit. Zur genaueren Untersuchung ist es aber nötig, die Geschwindigkeit in jedem einzelnen Augenblicke zu betrachten. Da sich die Schnelligkeit, mit welcher die Bewegung vor sich geht, immer nur allmählich (kontinuierlich), nicht plötzlich ändert, so genügt es, eine hinreichend kleine Zeitdauer der Bewegung zu betrachten und für diese die mittlere Geschwindigkeit zu ermitteln, um für den gegebenen Augenblick die Geschwindigkeit angeben zu können.

Unter der Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung in einem bestimmten Augenblicke versteht man hiernach die mittlere Geschwindigkeit des mat. P. während einer diesen Augenblick enthaltenden möglichst kleinen (unendlich kleinen) Zeitdauer. Um auszudrücken, daß diese Zeitdauer möglichst klein anzunehmen ist, schreiben wir vor den Buchstaben t das Zeichen Δ (Delta, großes griechisches D) und da in dieser sehr kleinen Zeit auch nur ein verhältnismäßig sehr kleiner Weg zurückgelegt werden wird, so schreiben wir auch an Stelle von s hier Δs. Nach Formel (3) ist demnach

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Sowohl Δs als Δt sind sehr kleine Brüche. Δt ist noch viel kleiner zu denken als eine Milliontel Sekunde und dem entsprechend ist auch Δs nur ein sehr kleiner Teil der Längeneinheit. Das Verhältnis dieser beiden sehr kleinen Zahlen kann aber trotzdem jeden beliebigen größeren oder kleineren Wert annehmen.

Aufg. 5. Ein mat. P. legte in 0,0000000001 Sek. einen Weg von 0,00000009467 ^{cm} zurück. Wie groß war die mittlere Geschwindigkeit während dieser Zeitdauer ausgedrückt in m pro Sek.?

Anm. Es giebt noch eine andere Art, die Geschwindigkeit zu definieren. Man sagt: Geschw. d. ungleichf. Bew. in einem bestimmten Augenblicke ist die Zahl, welche angiebt, wie viel Längeneinheiten der mat. P. in der nächsten Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn von diesem Augenblicke an die Bewegung gleichförmig werden würde. Das führt aber auf dieselben Werte wie unsere Definition. Denn nehmen wir an, daß zu einer Zeiteinheit n Zeitteilchen Δt gehören (wobei n eine sehr große Zahl) so würde der gleichförmigen Bewegung wegen in der nächsten Zeiteinheit der Weg Δs auch $n$mal durchlaufen werden. Es ist aber dann

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{n \,.\, \Delta s}{n \,.\, \Delta t} = \frac{n \,.\, \Delta s}{1} = n \,.\, \Delta s = v,$$

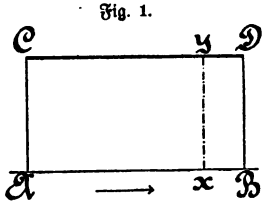
woraus die Behauptung folgt.

13. Diagramm der Geschwindigkeit. Diagramm ist eine Zeichnung, welche gewisse Vorgänge oder die Beziehung zwischen gewissen Größen in übersichtlicher Weise zur Anschauung bringt. Das Diagramm der Geschwindigkeit soll zur Anschauung bringen, wie groß bei einer gewissen Bewegung in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit des mat. P. war und wie sich dieselbe im Verlaufe der Zeit änderte.

14. Darstellung der Zeit durch eine gerade Linie. Das Fortschreiten der Zeit läßt sich zur Anschauung bringen durch eine gerade Linie, die von einem Punkte in gleichförmiger Bewegung durchlaufen wird. Der augenblickliche Ort dieses Punktes stellt die Gegenwart, jeder Punkt der Geraden in der Richtung der Bewegung einen Augenblick der Zukunft und die andere Seite der Geraden die Vergangenheit dar. Wie die Zeit, so ist auch die Gerade nach beiden Seiten hin unendlich lang. Eine Strecke der Geraden stellt eine gewisse Zeitdauer dar. Es ist erforderlich, zur vollständigen Darstellung einen Zeitmaßstab anzuwenden, d. h. anzugeben, durch welche Länge die Zeiteinheit dargestellt werden soll.

15. Geschwindigkeitsdiagramm der gleichförmigen Bewegung. Auf der die Zeit darstellenden Geraden gebe man zunächst die Zeitdauer t an. Dieselbe sei durch die Strecke AB (Fig. 1) gegeben. Im Punkte A errichte man eine Senkrechte und trage darauf mit Hilfe eines Geschwindigkeitsmaßstabes eine Strecke AC ab, welche die Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung angiebt. Denkt man sich in jedem Punkte X der Strecke AB eine Senkrechte XY errichtet, die mit Rücksicht auf den gewählten Maßstab angiebt, wie groß die Geschwindigkeit in dem Augenblicke war, welcher dem Punkte X entspricht, so erhält man eine Figur $ACDB$, welche das Geschwindigkeitsdiagramm heißt. Für die gleichförmige Bewegung ist dasselbe ein Rechteck. Warum?

Fig. 1.



Lehrsatz. Der Inhalt des Rechtecks $ACBD$ (Fig. 1) stellt mit Rücksicht auf die Maßstäbe den von dem bewegten mat. P. zurückgelegten Weg dar. Beweise dies!

Aufg. 6. Wenn in Fig. 1 der Zeitmaßstab 1 Sek. $=$ 3 mm und der Geschwindigkeitsmaßstab 1 m pro Sek. $=$ 8 mm ist, wie heißt der Maßstab, nach welchem die Rechtecksfläche auszumessen ist, um daraus den Weg des mat. P. zu erhalten? Dasselbe, wenn an Stelle von 3 und 8 mm a resp. b cm treten!

16. Eine Bewegung, bei welcher sich die Geschwindigkeit des mat. P. fortwährend vergrößert, heißt eine beschleunigte. Nimmt

die Geschwindigkeit während des betrachteten Bewegungsvorganges fortwährend ab, so heißt die Bewegung eine verzögerte.

Aufg. 7. Zeichne das Diagramm einer Bewegung, die im Anfange viel, später allmählich weniger beschleunigt ist und zuletzt in eine gleichförmige übergeht a) mit, b) ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Aufg. 8. Ein mat. P. bewegte sich 6 Sek. lang; vorher war er in Ruhe, dann wurde er gleichförmig beschleunigt und erreichte nach 3 Sek. die größte Geschwindigkeit von 8 m pro Sek.; von da ab nahm seine Geschwindigkeit gleichmäßig ab, bis er zuletzt wieder in Ruhe ist. Zeichne das Diagramm dieser Bewegung unter Annahme geeigneter Maßstäbe.

Aufg. 9. Wie wird ungefähr das Diagramm der Bewegung eines Eisenbahnzuges aussehen, der von A nach C fährt, in der Zwischenstation B 5 Minuten Aufenthalt hat, von A nach B 20 Minuten und von B nach C 35 Minuten fährt. In der Mitte zwischen B und C kommt eine Strecke mit starker Steigung vor, die er langsamer durchfährt als die übrigen.

Anm. Man hat Apparate konstruiert, die derartige Diagramme behufs Kontrolierung des Zugpersonals selbstthätig verzeichnen.

17. Gleichförmig veränderte Bewegung. Vermehrt sich die Geschwindigkeit eines mat. P. in $\frac{1}{n}$ der Zeit während des betrachteten Bewegungsvorganges stets um $\frac{1}{n}$ der Gesamtzunahme, so wird die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte genannt. Findet in derselben Weise eine stetige Abnahme der Geschwindigkeit statt, so heißt die Bewegung gleichförmig verzögert. Beide zusammen nennt man gleichförmig veränderte Bewegungen.

18. Lehrsatz. Das Geschwindigkeitsdiagramm der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist ein Dreieck oder ein Trapez, je nachdem die Bewegung ohne oder mit Anfangsgeschwindigkeit erfolgte. Beweis!

Aufg. 10. Dasselbe für die gleichförmig verzögerte Bewegung!

19. Unter der **Beschleunigung** resp. **Verzögerung** der gleichförmig veränderten Bewegung versteht man die Zunahme resp. Abnahme der Geschwindigkeit des mat. P. während der Zeiteinheit. Dieselbe wird mit dem Buchstaben G bezeichnet.

Aufg. 11. Wenn die Beschleunigung einer Bewegung $= 3$ m pro Sek., wieviel beträgt dieselbe für die Minute als Zeiteinheit?

Anl. z. Lösung. In einer Minute wird die Geschwindigkeit 60mal mehr anwachsen als in der Sekunde. Da aber zugleich auch die Geschwindigkeit nun auf die Minute als Zeiteinheit zu beziehen ist, so ist die Beschleunigung nicht $= 180^{m}$ pro Minute, sondern?

20. Lehrsatz. Bezeichnet v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, so ist

(5) . . . . . $v = v_0 \pm Gt.$

Es ist das obere oder untere Vorzeichen zu wählen, je nachdem die Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert ist.

Aufg. 12. Ein Eisenbahnzug hat eine Geschwindigkeit von 5^{m} pro Sek. Letztere soll im Zeitraume von $1^1/_2$ Minuten auf 18^{m} gesteigert werden; wie groß ist die verlangte Beschleunigung?

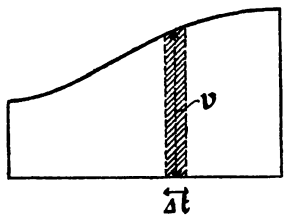
21. Lehrsatz. Der Inhalt des Geschwindigkeitsdiagrammes einer beliebigen Bewegung giebt unter Berücksichtigung der angewendeten Maßstäbe den von dem mat. P. zurückgelegten Weg an. (Vgl. Aufg. 6.)

Anl. z. Bew. Nach Formel 4 (§ 12) ist

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \text{daher } \Delta s = v \,.\, \Delta t.$$

Es wird aber Δt auf der Grundlinie des Diagrammes durch eine sehr kleine (unendlich kleine) Strecke angegeben, welche die Grundlinie eines sehr schmalen sich senkrecht in die Höhe erstreckenden Trapezes bildet, dessen mittlere Höhe $= v$ ist. Der Inhalt des Trapezes ist demnach $= v \,.\, \Delta t$, also $= \Delta s$. Der Inhalt des ganzen Diagrammes besteht aber aus der Summe aller Trapeze dieser Art, wie auch s sich aus der Summe aller seiner Teile Δs zusammensetzt, woraus die Behauptung folgt. (Vgl. Fig. 2, worin jedoch Δt viel kleiner zu denken ist.)

Fig. 2.



22. Lehrsatz. Der bei einer gleichförmig veränderten Bewegung (gleichgiltig ob beschleunigt oder verzögert) zurückgelegte Weg ist

(6) . . . . . $s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t.$

Anl. z. Bew. Das Geschwindigkeitsdiagramm ist ein Trapez, dessen parallele Seiten v und v_0 und dessen Höhe t ist, während

die Fläche den Weg angiebt (§ 21); v bedeutet darin die Endgeschwindigkeit.

Ist das Diagramm dagegen ein Dreieck, so behält die Formel gleichfalls Giltigkeit, wenn man darin v_0 resp. v gleich Null setzt.

23. Setzt man in Gl. (6) den Wert von v aus Gl. (5) ein, so erhält man

$$s = \frac{v_0 \pm Gt + v_0}{2} \cdot t = v_0 t \pm \frac{Gt^2}{2}.$$

Löst man ferner Gl. (5) nach t auf,

$$t = \pm \frac{v - v_0}{G}$$

und setzt diesen Wert in (6) ein, so erhält man

$$s = \pm \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{G} = \pm \frac{v^2 - {v_0}^2}{2G}.$$

24. Zusammenstellung der für die gleichförmig veränderte Bewegung giltigen Formeln.

$$\left.\begin{array}{l|l} v = v_0 + Gt & v = v_0 - Gt \\ s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t & s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \\ s = v_0 t + \frac{Gt^2}{2} & s = v_0 t - \frac{Gt^2}{2} \\ s = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2G} & s = \frac{{v_0}^2 - v^2}{2G} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Formeln links beziehen sich auf die gleichförmig beschleunigte, diejenigen rechts auf die gleichförmig verzögerte Bewegung. Jede dieser Formeln enthält 4 Größen. Mit ihrer Hilfe lassen sich die beiden übrigen auf eine gleichförmig veränderliche Bewegung bezüglichen Größen stets berechnen, wenn drei derselben bereits bekannt sind.

25. Der freie Fall eines Körpers im luftleeren Raume ist, wie die Erfahrung lehrt, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung dieser Bewegung ist an verschiedenen Orten der Erde etwas verschieden; am Äquator und auf hohen Bergen etwas geringer als in der Nähe der Pole oder im Tieflande. Dagegen ist sie gleich groß für alle Körper. Die Fallgesetze wurden von Galilei (geb. 1564, gest. 1642) entdeckt; die Alten hatten darüber unrichtige Vorstellungen.

Die Beschleunigung der Fallbewegung wird zum Unterschiede von der Beschleunigung beliebiger Bewegungen mit g bezeichnet. Für Rechnungen, die keine außergewöhnliche Genauigkeit verlangen wird (in unseren Gegenden) g stets $= 9{,}81^{m}$ pro Sek. gesetzt (Pariser Sternwarte $g = 9{,}808^{m}$ pro Sek.).

Bei vielen praktisch wichtigen Fallbewegungen in der Atmosphäre ist der Einfluß des Luftwiderstandes so gering, daß er ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden kann; nämlich immer dann, wenn die Oberfläche des Körpers verhältnismäßig gering ist im Vergleiche zum Gewichte desselben und wenn nur geringe Geschwindigkeiten vorkommen.

Aufg. 12. Welchen Weg legt ein frei herabfallender Körper in 3 Sek. zurück?

Aufg. 13. Wieviel Zeit braucht ein Stein, um von einem 120^{m} hohen Turme herabzufallen?

Aufg. 14. Wie tief ist ein Schacht, wenn 8 Sek. vom herabwerfen des Steines an verfließen, bis das Geräusch des Aufschlagens oben gehört wird? Der Schall pflanzt sich nach oben mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 333^{m} pro Sek. fort.

Aufg. 15. Die Kugel eines Geschützes hat beim Verlassen des Laufes von $0{,}8^{m}$ Länge eine Geschwindigkeit von 500^{m} pro Sek. erlangt. Wieviel Zeit brauchte sie um den Lauf zu durcheilen und wie groß war die Beschleunigung derselben, wenn die Bewegung als eine gleichförmig veränderte angesehen wird?

Aufg. 16. Ein Schlittschuhläufer hatte eine Geschwindigkeit von 5^{m} pro Sek. erreicht und blieb dann noch 12 Sek. in Bewegung, bis er zur Ruhe kam. Welche Strecke durchlief er noch und wie groß war die Verzögerung?

Aufg. 17. Ein Eisenbahnzug soll bei der Geschwindigkeit von 20^{m} pro Sek. so rasch zum Stillstande gebracht werden, daß er nur noch 150^{m} durchläuft. Wie groß muß die (durch Bremsen) bewirkte Verzögerung sein und wie lange bleibt er noch in Bewegung?

Aufg. 18. Ein Dampfhammer soll, wenn er lediglich durch die Wirkung seines Gewichtes aus der Höhe von $0{,}6^{m}$ herabfällt, in der Minute 30 Schläge ausführen; wieviel Prozent der ganzen Zeit während eines Schlages werden zum Herabfallen gebraucht?

Aufg. 19. Wie hoch würde eine senkrecht nach oben abgeschossene Kanonenkugel von 400^{m} pro Sek. Anfangsgeschwindigkeit fliegen, wenn der Luftwiderstand nicht in Betracht käme und wie lange würde es dauern, bis sie wieder herunter fiele?

26. Unter der **Beschleunigung der ungleichförmig veränderten Bewegung** in einem gegebenen Augenblicke versteht man das Verhältnis $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ aus dem in einem sehr kleinen, jenen Augenblick enthaltenden Zeitelemente erfolgten Geschwindigkeitszuwachse und der (sehr geringen) Dauer dieses Zeitelementes.

Lehrsatz. Die Beschleunigung ist in jedem Augenblicke proportional der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen in dem Geschwindigkeitsdiagramme die geometrische Tangente an die Geschwindigkeitskurve mit der Grundlinie bildet. Beweis!

Für die Verzögerung gilt ähnliches.

27. Winkelbeschleunigung. Beschreibt ein mat. P. eine kreisförmige Bahn, bei deren Betrachtung der Begriff der Winkelgeschwindigkeit (§ 9) benutzt wird, so wird auch der Begriff der Winkel- oder Rotationsbeschleunigung analog der gewöhnlichen Beschleunigung gebraucht. Unter Winkelbeschleunigung der gleichförmig beschleunigten Rotation versteht man die Zahl, welche angiebt, um wieviel sich die Winkelgeschwindigkeit in jeder Zeiteinheit vergrößert.

Aufg. 20. Für die gleichförmig veränderte Rotation bestehen ähnliche Beziehungen wie die Formeln (7). Leite dieselben ab!

28. Bei der krummlinigen Bewegung eines mat. P. wird das, was wir bisher kurzweg Beschleunigung nannten, häufig auch Tangentialbeschleunigung genannt, im Gegensatze zu der sog. Normalbeschleunigung. Was man unter letzterer versteht, wird erst später erklärt werden.

Relative Bewegung.

29. Unter der relativen Bewegung eines mat. P. gegen einen selbst in Bewegung begriffenen Körper versteht man die scheinbare Bewegung desselben, welche ein auf jenem Körper befindlicher Beobachter wahrnimmt.

Beisp. Ein in einem davonfahrenden Wagen befindlicher Insasse nimmt keine Bewegung an einem Buche wahr, das er neben sich auf den Sitz legte; dasselbe bleibt fortwährend an derselben Stelle des Wagenraumes. Man sagt dann: es befindet sich in relativer Ruhe gegen den Wagenraum.

Aufg. 21. Welches ist die relative Bewegung eines an einem Wagenrade befindlichen mat. P. gegen den Wagen und welche die absolute?

Auch ein mat. P. der festen Erde befindet sich in relativer Bewegung gegen den davonfahrenden Wagen.

30. Unter der **relativen Bahn** versteht man die Aufeinanderfolge der Punkte des von dem betr. Körper aus auszumessenden Raumes, in denen sich der mat. P. der Reihe nach befunden hat.

Beisp. Wird auf den davonfahrenden Wagen eine Kugel abgeschossen, die an mehreren Stellen Spuren zurückließ, so wird durch diese die relative Bahn der Kugel gegen den Wagen gekennzeichnet. Diese relative Bahn bewegte sich mit dem Wagen weiter, während die absolute Bahn immer an derselben Stelle der Erde bleibt.

31. Im Grunde genommen ist jede von uns betrachtete Bewegung nur eine relative. Der Bequemlichkeit wegen werden aber bei den gewöhnlichen Anwendungen der Mechanik die Bewegungen relativ zur Erde als absolute bezeichnet (geozentrischer Standpunkt). Bei der Beschreibung der Bewegungen der Planeten werden jene relativ zur Sonne angegeben (heliozentrischer Standpunkt).

Anm. An und für sich würde es nicht als fehlerhaft angesehen werden dürfen, wenn man in der Astronomie die Bewegungen der Himmelskörper relativ zur Erde angeben wollte, wie es die Alten im Ptolemäischen Systeme versuchten. Auch sind die Bewegungsangaben der heutigen Astronomie keineswegs streng heliozentrische. Sie waren es nur scheinbar, so lange man von einer Achsendrehung der Sonne gegen den unserer heutigen Anschauung zu Grunde liegenden Raum nichts wußte. Streng genommen ist ein solcher Raum, den wir als absoluten Raum ansehen, erst durch die Vorstellungen des Kopernikanischen Systems definiert worden. Das Kopernikanische System rechtfertigt sich durch die Möglichkeit einer einfachen Beschreibung der Bewegungen und des gesetzmäßigen Einflusses, den die Weltkörper erfahrungsmäßig aufeinander ausüben.

32. Zusammensetzen der Bewegungen. Bewegt sich ein mat. P. relativ zu einem selbst in Bewegung begriffenen Raume, so führt er, wie man sagen kann, zwei Bewegungen zugleich aus, die Relativbewegung nämlich und die Bewegung welche er mit jenem Raume ausführt. Das Resultat dieser beiden Bewegungen ist eine einzige absolute Bewegung. Das Aufsuchen der letzteren (welche die resultierende Bewegung genannt wird), wenn jene gegeben sind, wird das Zusammensetzen der Bewegungen genannt.

33. Wenn sich auf einem abwärts fahrenden Schiffe in der Richtung stromaufwärts ein Mann bewegt, so kann er sich in absoluter Ruhe befinden (wenn er nämlich ebenso rasch aufwärts geht, als das Schiff abwärts fährt); andernfalls ist die absolute Bewegung gleich der Differenz (oder wenn er abwärts ging gleich der Summe) der beiden Einzelbewegungen. Schließt dagegen die Relativbewegung des Mannes auf dem Schiffe mit der Bewegungsrichtung des letzteren einen Winkel ein, so ist die Absolutbewegung des ersteren gleich der graphischen Summe der beiden Einzelbewegungen.

34. Unter der **graphischen Summe** zweier Strecken von verschiedener Richtung versteht man nämlich die Summe derselben mit Berücksichtigung der Richtungen. Um dieselbe zu erhalten trägt man an den Endpunkt der ersten Strecke die zweite (in parallel verschobener Lage) an. Die gerade Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der zweiten Strecke wird die graphische Summe genannt. In ähnlicher Weise können auch drei oder mehr Strecken graphisch summiert werden. Sind die beiden Strecken parallel, so geht die graphische Summe in die algebraische Summe über.

Anm. Graphisch summieren kann man nur solche Strecken, für welche angegeben ist, in welchem Sinne sie genommen werden sollen (z. B. von links nach rechts oder umgekehrt u. s. w.). Bei Bewegungen wird der Sinn angezeigt durch einen Pfeil, der angiebt, wohin sich der Körper bewegt. Beim graphischen Summieren müssen die Pfeile der zu summierenden Strecken aufeinander folgen, der Pfeil der graphischen Summe dagegen ist entgegengesetzt gerichtet.

Lehrsatz. Die resultierende Bewegung von zwei geradlinigen und gleichförmigen Bewegungen ist wieder eine geradlinige und gleichförmige.

Anl. z. Bew. Man zerlege die ganze Zeit t in n gleiche Teile. Es ergiebt sich dann leicht mit Hilfe kongruenter Dreiecke, daß die Punkte des Raumes, in denen sich der bewegliche Punkt nach $\frac{1}{n}t$, $\frac{2}{n}t$, $\frac{3}{n}t$ u. s. w. befunden hat, in gerader Linie liegen und daß die zurückgelegte Strecke der Zeit proportional ist.

Zusatz. Dasselbe gilt auch für die Resultierende aus zwei geradlinigen, gleichförmig veränderten Bewegungen. Beweis wie oben.

35. Zerlegen der Bewegungen. Wie sich jede mathematische

Operation umkehren läßt, so folgt auch durch Umkehren der Zusammensetzung die Möglichkeit der Zerlegung einer Bewegung in mehrere einzelne. Ein in schräger Richtung in die Höhe geworfener Stein z. B. beschreibt eine krumme Linie (im luftleeren Raume eine Parabel). Diese Bewegung kann man sich zerlegt denken in eine senkrechte, (infolge der Einwirkung der Schwerkraft) gleichförmig veränderte und eine gleichförmig fortschreitende horizontale. Die Regeln für das Zerlegen der Bewegungen ergeben sich unmittelbar aus jenen für das Zusammensetzen derselben.

Beispiel. Auf einem sich gleichförmig bewegenden Eisenbahnwagen befinde sich ein senkrecht gerichtetes Rohr, aus dem eine Kugel in die Höhe geworfen wird. Relativ zum Eisenbahnwagen ist die Bewegung der letzteren genau senkrecht gerichtet und folgt den Fallgesetzen. Von der Erde aus gesehen stellt sich die Bewegung jedoch als ein schiefer Wurf dar, weil die Kugel die ihr schon vor dem Wurfe innewohnende gleichförmige Bewegung des Wagens noch weiter mitmacht. Gerade so wie man beide Bewegungen sich durch eine einzige ersetzt denken darf, muß aber auch das Umgekehrte zulässig sein.

Die Bewegungen, in welche man sich eine gegebene zerlegt denken kann, werden deren Komponenten genannt.

Zweites Kapitel.

Die Kräfte und deren Zusammensetzung.

36. Gesetz der Trägheit. Dasselbe sagt aus, daß ein mat. P., der sich einmal in Bewegung befindet, sich immer in derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit weiter bewegt, so lange ihn nicht eine äußere Ursache zu einer Änderung seiner Bewegung veranlaßt. Gleiches gilt von einem in Ruhe befindlichen mat. P. Von einem Körper gilt (weil er aus mat. P. aufgebaut ist) natürlich ähnliches; doch können dort die Erscheinungen komplizierterer Art sein.

Das Gesetz der Trägheit ergänzt in gewissem Sinne das in § 2 (S. 1) erwähnte Kontinuitätsgesetz und giebt gleichfalls eine der wichtigsten Eigenschaften der Materie an.

37. Alle Ursachen, die in dem eben angegebenen Sinne auf die Bewegung eines mat. P. Einfluß haben (und nur diese), werden in der Mechanik **Kräfte** genannt.

38. Die Erfahrung lehrt, daß Kräfte auf einen mat. P. nur ausgeübt werden können von anderen mat. P. (oder Körpern), die noch außer ihm existieren. Sobald wir daher einen Einfluß auf den Bewegungszustand eines mat. P. (oder Körpers) beobachten, der von den uns bekannten Körpern seiner Umgebung nicht herrühren kann, müssen wir schließen, daß noch irgend ein anderer, bis dahin unbekannter Körper existiert, von dem diese Kräftewirkung ausgeht.

Beispiel. So hat Leverrier (1846) aus den Störungen des Uranus auf das Vorhandensein eines bis dahin unbekannten Planeten (des Neptun) geschlossen und ihn auf Grund seiner Rechnungen thatsächlich aufgefunden.

39. Prinzip der Aktion und Reaktion. Newton sprach zuerst aus, daß jeder Wirkung eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Gegenwirkung entspreche. Wenn also ein Körper A durch einen Körper B in seinem Bewegungszustande beeinflußt wird, so muß auch umgekehrt B durch A in entgegengesetzter Weise beeinflußt sein.

Beispiele. Wenn man sagt, der Magnet ziehe das Eisen an, so ist dies nur eine einseitige Beurteilung des thatsächlichen Verhaltens. Ebenso gut zieht nämlich auch das Eisen den Magneten an. Die Einwirkung ist eine gegenseitige. — Wenn ich mich auf einen Stuhl lehne, so drücke ich auf den Stuhl abwärts, dieser aber drückt auf meinen Körper aufwärts. Die letztere Kräftewirkung verhindert, daß ich nach abwärts falle, die erstere bewirkt ein stärkeres Aufpressen des Stuhles auf den Boden. — Nicht nur die Erde zieht den Mond an, sondern auch umgekehrt der Mond die Erde, resp. alle mat. P., aus denen letztere besteht. Aus der letztern Einwirkung erklärt sich Ebbe und Flut unserer Meere, aus der ersteren die Bewegung des Mondes um die Erde.

Die Kräfte treten demnach in der Natur stets paarweise zwischen zwei verschiedenen mat. P. auf. Welche der beiden Kräftewirkungen man nun gerade in einem bestimmten Falle die Aktion (Wirkung) und welche die Reaktion (Gegenwirkung) nennen will, ist völlig gleichgiltig.

40. Nach den gegebenen Erklärungen sind als Kräfte nur solche Ursachen bezeichnet, die auf die Bewegung (oder Ruhe) mat. P.

Einfluß haben. Spricht man dagegen von einer auf einen Körper einwirkenden Kraft (wie in den vorigen Beispielen geschehen), so faßt man damit eine ganze Reihe von Einzelwirkungen in einen einzigen Begriff zusammen. Was man unter den an Körpern wirkenden Kräften zu verstehen hat kann erst erklärt werden, wenn gezeigt wurde, wie jene Einzelwirkungen, die sich an den einzelnen mat. P. des Körpers äußern, sich zu einer Gesamtwirkung vereinigen.

41. Einteilung der Kräfte. Diejenigen Kräfte, welche auf einen mat. P. von anderen Teilen desselben Körpers ausgeübt werden, zu dem auch der betroffene mat. P. gehört, werden **innere** genannt; alle übrigen, von fremden Körpern ausgehende Kräfte nennt man **äußere.**

Betrachtet man einen festen Körper, so kann es hiernach nicht zweifelhaft sein, welche der an seinen einzelnen Teilen wirkenden Kräfte man als innere oder als äußere zu bezeichnen hat. Bei flüssigen Körpern ist die Unterscheidung weniger wesentlich und wird hinfällig, wenn ein Flüssigkeitsquantum während der Bewegung seine Gestalt fortwährend verändert und in mehrere getrennte Teile zerfällt.

42. Wenn man auch nicht immer anzugeben vermag, welches der eigentliche Grund für das Auftreten einer Kräftewirkung zwischen zwei mat. P. ist, so ist dies doch in einem besonders wichtigen Falle möglich. Die Materie ist nämlich undurchdringlich, d. h. der Raum, der von einem Körper eingenommen wird, kann nicht zugleich von einem anderen eingenommen werden. Suchen sich nun zwei Körper (vermöge der Bewegungen, die sie vorher hatten, oder infolge anderweitiger Ursachen) gegenseitig zu durchdringen, so bildet die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit ein Hindernis dafür. Durch sie wird also ein Einfluß auf den Bewegungszustand der Körper, d. h. eine Kräftewirkung hervorgerufen. Da hierbei nur die an den sich berührenden Oberflächen liegenden mat. P. direkt beteiligt sind, werden derartige Kräfte **Oberflächenkräfte** (oder auch Druckkräfte) genannt. Ebenso gut könnte man sie Berührungskräfte nennen, da ihr Auftreten eine Berührung zur notwendigen Voraussetzung hat.

43. Alle übrigen Kräfte, die nicht Oberflächenkräfte sind, nennt man **Massenkräfte.** Sie vermögen sich auf entfernte Punkte ohne jedes ersichtliche Zwischenglied zu übertragen und können daher auch direkt auf die im Innern der Masse eines Körpers gelegenen mat. P. von außen her einwirken, woher der Name kommt. Die wichtigste Massenkraft ist die Schwerkraft.

44. Nach den beiden Einteilungen, die wir machten, lassen sich die Kräfte hinsichtlich ihres Auftretens in folgende vier Gruppen bringen:

1) innere Oberflächenkräfte,
2) innere Massenkräfte,
3) äußere Oberflächenkräfte,
4) äußere Massenkräfte.

In welche dieser vier Gruppen eine Kraft in einem bestimmten Falle zu rechnen ist, läßt sich nicht immer genau angeben. Namentlich läßt sich oft schwer feststellen, ob eine innere Kraft zu den Oberflächenkräften oder zu den Massenkräften zu rechnen ist, d. h. ob sie der Undurchdringlichkeit der Materie oder anderen Ursachen (molekulare Anziehung oder Abstoßung) ihren Ursprung verdankt. Indessen thut dieser Mangel an genauerer Kenntnis der Art, wie sich die Körper aus kleinsten Teilchen aufbauen und wie diese aufeinander einwirken, der Mechanik nur wenig Abbruch.

Beispiel. Wenn ein Stein auf einem Tische liegt, so ist aus der Erfahrung bekannt, daß er herabfallen würde, wenn der Tisch nicht vorhanden wäre. Wenn er sich durch den Tisch hindurch bewegen könnte, würde er der Schwerkraft folgen. Durch die Undurchdringlichkeit des Tisches wird aber eine Oberflächenkraft (zwischen diesem und dem Steine) hervorgerufen, welche zunächst die untersten mat. P. des Steines an der Bewegung nach abwärts verhindert. Die weiter oben befindliche Materie des Steines wird in gleicher Weise durch die untere Schicht an der Abwärtsbewegung gehindert. Wir können also hier äußere Massenkräfte (nämlich die Schwerkräfte), äußere Oberflächenkräfte (zwischen Tisch und Stein) und innere Oberflächenkräfte beobachten. Ragt ein Teil des Steines über den Tischrand hinaus so erkennt man, daß auch innere Massenkräfte (Molekularkräfte) auftreten müssen, um das Herabfallen dieses Teiles zu verhindern. Diese letzteren bedingen die Festigkeit des Materials.

45. Äußere Massenkräfte treten bei verschiedenen Veranlassungen auf. Außer der Schwerkraft kennt man die allgemeine

Gravitation (Anziehung der Weltkörper unter sich, ebenso Anziehung eines großen Berges auf der Erde auf die Gegenstände in der Nähe, welche eine geringe Ablenkung der Fallrichtung von der nach dem Erdmittelpunkte gehenden veranlaßt); ferner die magnetischen und elektrischen Anziehungs- und Abstoßungskräfte, sowie die Adhäsion. Andere sind uns nicht bekannt.

46. Unter **animalischen Kräften** versteht man die Kräfte, welche von einem tierischen (oder menschlichen) Körper auf irgend einen anderen Körper übertragen werden. Sie sind stets äußere Oberflächenkräfte. Wollte man dagegen die Wirkung der einzelnen Teile des animalischen Körpers aufeinander studieren, so würde man es mit inneren animalischen Kräften zu thun haben. Diese Betrachtungen gehören in die Physiologie, sind aber bisher noch wenig durchgeführt worden.

47. Der **Wille** des Menschen (oder Gottes) oder auch des Tieres ist ebenfalls eine Bewegungsursache, und zwar besonders geheimnisvoller Art. Sieht man von dem göttlichen Willen ab, so kann der Erfahrung zufolge der Wille direkt nur auf den animalischen Körper, von dem er ausging, einwirken, kann also unberücksichtigt bleiben, wenn man auf die Behandlung des inneren animalischen Körpers verzichtet.

48. Die neueren Forschungen haben zu dem Schlusse geführt, daß ein sog. Äther existieren müsse, der die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, der Elektrizität und des Magnetismus vermittelt. Ob derselbe als Materie anzusehen sei oder nicht, ist zweifelhaft, da wir von den Eigenschaften desselben noch viel zu wenig wissen. Er kommt nur insoweit in Betracht, als er eine Kräftewirkung zwischen mat. P. hervorruft und vermittelt. Vielleicht kommen sämtliche Massenkräfte nur durch seine Einwirkung oder Vermittelung zu stande. In der Mechanik wird indessen gewöhnlich von dem Äther ganz abgesehen und die etwaige Wirkung desselben durch die Einführung jener Fernkräfte berücksichtigt.

49. Die sog. **elektro-motorischen** Kräfte (d. s. solche Ursachen, welche eine Bewegung der Elektrizität hervorrufen) und welche von den elektrischen (pondero-motorischen) Kräften sehr wohl zu unterscheiden sind, dürfen nicht ohne weiteres als Kräfte im Sinne der

Mechanik angesehen werden, da die Elektrizität nach unserer bisherigen Erfahrung nicht die Eigenschaften der wägbaren Materie besitzt.

50. Gleiches gilt auch von den **chemischen** Kräften, die so lange nicht in die Mechanik gehören, als nicht eine ersichtliche Bewegung der Materie durch dieselben veranlaßt wird. Dagegen können durch chemische Kräfte chemische Vorgänge veranlaßt werden, die nun ihrerseits eine Bewegung der Materie verursachen. Wird z. B. ein Gewehr abgeschossen, so findet ein chemischer Prozeß statt, der schließlich eine Bewegung zur Folge hat. Die sog. chemischen Kräfte, die diesem Vorgange zu Grunde liegen, sind es aber nicht, welche direkt diese Bewegung veranlassen, sondern sie sind die Ursache des Auftretens von Kräften, die ihrerseits die Bewegung zur Folge haben. In gleicher Weise kann auch die Wärme eine Kräftewirkung und in deren Folge eine Bewegung veranlassen. Mit den Ursachen des Auftretens der Kräfte hat sich aber die Mechanik nicht zu beschäftigen, sondern betrachtet dieselben als etwas Gegebenes.

Anm. Für die reine Mechanik hat diese Aufzählung und Einteilung der Kräfte daher gar keine Bedeutung; sie ist nur der Anwendung wegen von Wichtigkeit.

51. Größe der Kräfte. Über die Größe von Dingen kann nur deren Vergleichung mit anderen Dingen derselben Art Aufschluß geben. Nehmen wir also an, wir hätten zwei mat. P., die gleich viel (wenn auch außerordentlich wenig) Materie besitzen und auf die je eine Kraft in derselben Richtung einwirkt. Ist der Erfolg ein gleichartiger, so müssen wir auch die zu Grunde liegenden Ursachen, d. h. die Kräfte, einander gleich setzen. Erzielt dagegen die eine Kraft eine raschere Bewegung als die andere, so müssen wir sie in demselben Maße als größer ansehen.

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken: Es zeigt sich, daß eine Kraft in der Natur stets eine gewisse Zeit hindurch wirken muß, um eine gewisse Geschwindigkeit zu erzielen. Während dieser Zeit wirkt sie fortwährend auf eine Vergrößerung der Geschwindigkeit hin. Erlischt dann etwa plötzlich die Kraft, so hört zwar die Geschwindigkeitsänderung auf, die bereits erlangte Geschwindigkeit behält der mat. P. aber nach dem Gesetze der Trägheit (§ 36) bei.

Die nächste Wirkung einer Kraft, die für sich allein auf einen vorher in Ruhe befindlichen mat. P. einwirkt, ist also die Beschleunigung, mit der sie ihn antreibt.

Anm. Früher mehr als jetzt, aber auch heute noch zuweilen, wird von sog. Momentankräften gesprochen. Man dachte sich darunter Ursachen, welche keines (wenn auch noch so kleinen) Zeitaufwandes bedürfen, um einen mat. P. in Bewegung mit gewisser Geschwindigkeit zu versetzen, und die, nachdem dies geschehen ist, zu wirken aufhören. Wenn nun auch an und für sich die Annahme dieser Momentankräfte nichts Ungereimtes enthalten würde, so zeigt doch alle Erfahrung, daß solche Kräfte in der Natur gar nicht vorkommen. Wir haben uns daher nicht damit zu beschäftigen.

52. Könnte man die mat. P., aus denen sich die Materie zusammensetzt, einzeln beobachten und wären diese einander völlig gleich, so würden demnach die Kräfte einfach durch die Beschleunigungen zu messen sein, die sie hervorbringen. Da man aber einen mat. P. niemals einzeln, sondern immer nur eine größere Anzahl mat. P., die zusammen einen Körper bilden, beobachten kann, so muß man auch auf eine solche Beobachtung das für die Kräfte zu wählende Maß gründen.

Bei allen technischen Anwendungen der Mechanik wählt man als Einheit das Kilogramm, d. h. diejenige Kräftewirkung, welche durch die Anziehung der Erde auf ein Kubikdecimeter Wasser (bei 4^0 C. und 760 mm Barometerstand) übertragen wird.

53. Freilich hat diese Maßeinheit den Nachteil, daß sie nicht an allen Orten der Erde gleich groß ist. Da nämlich die Beschleunigung der Schwere an verschiedenen Orten der Erde verschieden groß ist (§ 25), so ist auch die durch die Anziehung der Erde bedingte Kraft verschieden groß (§ 51). Für die gewöhnlichen Anwendungen ist die Differenz aber so unmerklich, daß sie vernachlässigt werden kann.

Für genauere Messungen hat man aber noch ein anderes Kräftemaß eingeführt. Das darauf begründete Maßsystem wird das absolute Maßsystem genannt. Als Einheit wird in diesem diejenige Kraft gerechnet, die einem Kubikcentimeter Wasser die Beschleunigung von 1 cm pro Sek. erteilt (1 Dyn.).

In unseren Breiten sind demnach etwa 981 000 absolute Einheiten gleich einem Kilogramm zu setzen.

54. Masse. Unter der Masse eines Körpers versteht man die Menge der in ihm enthaltenen Materie. Dürfte man annehmen, daß alle mat. P., aus denen sich die Materie zusammensetzt, völlig unter einander gleich wären, so würde die Masse nur von der Anzahl der in dem Körper enthaltenen mat. P. abhängen. Da wir aber weder darüber etwas wissen, noch die Anzahl anzugeben vermögen, so können wir nur aus dem Verhalten eines Körpers während der Einwirkung von Kräften auf die Masse desselben schließen.

Anm. Der Begriff der Masse ist nicht nur für die Mechanik, sondern stets von Wichtigkeit, wenn man mit Körpern zu thun hat. Zur Bestimmung derselben bedient man sich der Wagen. Beim Gebrauche der Wagen werden zunächst Kräfte mit einander verglichen und daraus ein Rückschluß auf die in den Körpern enthaltenen Massen gezogen. Bei den sog. Federwagen wird die an dem auf seine Masse zu untersuchenden Körper wirkende Schwerkraft verglichen mit der elastischen Kraft einer Feder; bei den Gewichtswagen werden zwei verschiedene Schwerkräfte mit einander verglichen. Da die Federkraft unabhängig von der Größe der Anziehung der Erde ist, zeigt eine Federwage, wenn man sie nach verschiedenen Punkten der Erde bringt, für denselben Körper etwas verschiedene Gewichte an, wie es ja auch wirklich der Fall ist (§ 53). Mit Gewichtswagen ist die verschiedene Größe der Schwere dagegen nicht zu erkennen, weil die beiden mit einander verglichenen Massen davon in gleichem Maße beeinflußt werden.

55. In demselben Maße, in welchem die Beschleunigung der Schwere an irgend einer Stelle der Erde größer ist, ist auch die an einem bestimmten Körper wirkende Schwerkraft (d. i. das Gewicht desselben) größer als anderswo und umgekehrt (§ 51).

Daher muß der Wert $\frac{Q}{g}$, wenn Q das Gewicht und g die Beschleunigung der Schwere an irgend einem Orte der Erde bedeutet, für jeden Körper überall dieselbe Größe behalten. [Denn wenn Zähler und Nenner eines Bruches in demselben Verhältnis vergrößert oder verkleinert werden, so bleibt der Wert des Bruches ungeändert.]

Der Bruch $\frac{Q}{g}$ hängt also nur von der in dem Körper enthaltenen Menge der Materie ab und kann darum zur Beurteilung der Masse eines Körpers dienen. Man nennt ihn darum auch

häufig (des bequemeren Ausdrucks wegen) selbst die Masse (M) und schreibt

(8) . . . . . $M = \frac{Q}{g}$.

Anm. Das Kilogramm, oder anstatt dessen das Gramm, hat außer der in § 52 erklärten Bedeutung noch eine andere, nämlich als Masseneinheit. Im absoluten Maßsystem (§ 53) wird das kgr oder gr nur in diesem Sinne gebraucht. Man versteht dann darunter diejenige Masse, welche in einem cdm (oder ccm) Wasser (4° C. u. s. w.) enthalten ist. Eigentlich ist diese Auffassung die richtigere; sie verträgt sich aber nicht mit der Annahme des kgr als Kräfteeinheit, da nach Formel (8) alsdann die Masse, welche in $\frac{1}{9{,}81}$ cdm Wasser enthalten ist, als Masseneinheit betrachtet werden muß.

56. Wenn durch eine Kraft P einem mat. P. die Beschleunigung G erteilt wird und Q das Gewicht desselben, g aber die Beschleunigung der Schwere bedeutet, so besteht nach § 51 die Proportion:

(9) . . . . . $\frac{P}{Q} = \frac{G}{g}$.

Dasselbe gilt auch, wenn die Kräfte P und Q nicht auf einen einzelnen mat. P. sondern auf einen Körper einwirken, auf dessen mat. P. sie sich gleichmäßig verteilen.

Aus (9) ergiebt sich

$$P = \frac{Q}{g} \cdot G$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (8)

(10) . . . . . $P = M \, . \, G$.

57. Eine Kraft ist als gegeben anzusehen, wenn man von ihr kennt: 1) den Angriffspunkt, d. h. denjenigen mat. P., auf welchen sie einwirkt; 2) die Richtung, d. i. diejenige Richtung, in welcher sie den Angriffspunkt zu bewegen sucht; 3) die Größe, letztere gemessen in kgr oder in absoluten Einheiten (§ 53) oder auch in einer beliebigen anderen Einheit.

58. Eine gegebene Kraft kann auch graphisch (d. h. durch Zeichnung) dargestellt werden. Zu diesem Zwecke giebt man in der Zeichnung des Körpers, zu dem ihr Angriffspunkt gehört, zunächst diesen letzteren an, zieht durch denselben eine Linie in der Richtung der Kraft und trägt darauf eine Strecke ab, die mit

Rücksicht auf einen (beliebig gewählten) Maßstab die Größe der Kraft angiebt. Um die Richtung der Kraft deutlich von der gerade entgegengesetzten zu unterscheiden zeichnet man auf der Strecke einen Pfeil ein, der dorthin weist, wohin die Kraft den Angriffspunkt zu bewegen sucht.

Anm. In der reinen Mechanik nimmt man niemals auf irgend eine Krafteinheit (kgr u. s. w.) Bezug. Es handelt sich dort nicht um die wirkliche Größe der Kräfte, sondern immer nur um das Verhältnis der Größen der in einer gewissen Aufgabe vorkommenden Kräfte zu einander. In diesem Falle kann man auch nicht einen bestimmten Kräftemaßstab für die graphische Darstellung der Kräfte zur Anwendung bringen. Es genügt vielmehr, wenn die Strecken, durch welche die Kräfte dargestellt werden, proportional den letzteren gewählt werden.

Aufg. 22. Ein Körper von 300 kgr Gewicht hat eine Geschwindigkeit von 6 m. Wie groß muß eine der Bewegung entgegen wirkende Kraft sein, die ihn in 5 Sek. zur Ruhe bringt?

Anl. z. Lösung. Die Geschwindigkeitsabnahme soll in 5 Sek. 6 m betragen, also ist die Verzögerung = 1,2 m pro Sek. Durch sein eigenes Gewicht erfährt aber jeder Körper eine Beschleunigung (oder Verzögerung) von 9,81 m pro Sek. Die verlangte Kraft ergiebt sich also aus der Proportion $9{,}81 : 1{,}2 = 300 : x$.

Aufg. 23. Wie groß ist der Druck der Pulvergase auf ein Geschoß von 20 kgr Gewicht, das nach Verlassen des Laufes die Geschwindigkeit von 500 m erlangt hat, wenn der Lauf 0,8 m lang ist? (Vgl. Aufg. 15.)

Aufg. 24. Wenn in dem vorigen Beispiele das Geschütz ein Gewicht von 1200 kgr hat, wie groß ist die Beschleunigung desselben durch den Rückstoß (vgl. § 39) und wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der es nach Beendigung des Schusses zurückläuft, wenn eine Reibung von 300 kgr entgegenwirkt; ferner wie weit wird es unter diesen Verhältnissen zurücklaufen?

Aufg. 25. Eine Elfenbeinkugel wird auf eine Platte aufgeschlagen, die mit Ruß geschwärzt ist. Wenn die Geschwindigkeit der Kugel 8 m pro Sek. betrug und aus der Größe des schwarzen Fleckes geschlossen werden kann, daß sie sich an der Berührungsstelle um 0,2 mm abplattete, wie groß war der durchschnittlich zwischen Platte und Kugel ausgeübte Druck, wenn das Gewicht derselben 0,1 kgr beträgt; b) wie groß ergiebt sich der durchschnittliche Druck, wenn der Radius der Kugel r, das spezif. Gewicht γ, der Radius des Fleckes a, die Anfangsgeschwindigkeit v genannt wird; c) wieviel Zeit vergeht vom Momente des Auftreffens, bis die Kugel ihre ganze Geschwindigkeit verloren hat?

Aufg. 26. Ein Eisenbahnzug von 30 000 kgr Gewicht soll beim Anfahren in 45 Sek. die Geschwindigkeit von 15 m pro Sek. erlangen. Wie groß muß die durch die Zugketten von der Lokomotive auf den Zug übertragene Kraft sein, wenn die Reibung = 0,003 des Gewichtes gesetzt werden kann?

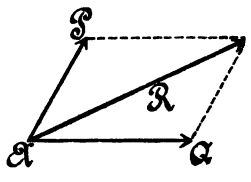
Aufg. 27. Mit welcher Geschwindigkeit darf ein Eisenbahnwagen von 8000 kgr Gewicht a) gegen eine feste Wand, b) gegen einen anderen ihm gleichen auffahren, ohne daß an dem Puffer etwas zerbricht, wenn sich letzterer um 15 cm eindrücken läßt und die Feder dann einen Druck von 1000 kgr ausübt?

Graphische Summe der Kräfte.

59. Wenn zwei Kräfte gleichzeitig an einem mat. P. wirken, so können sich deren Wirkungen entweder gegenseitig völlig aufheben (wann wird dies geschehen?) oder sie vereinigen sich zu einer einzigen Gesamtwirkung. Diese Gesamtwirkung würde auch durch eine einzige Kraft hervorgebracht werden können. Man nennt letztere die Resultierende jener beiden Kräfte, welche im Gegensatze zu jener auch die Komponenten genannt werden.

60. Parallelogramm der Kräfte. Von Varignon und Newton (1687) wurde zuerst in klarer Form der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ausgesprochen. Derselbe lehrt, daß die Resultierende von zwei an demselben mat. P. angreifenden Kräften durch Konstruktion eines Parallelogramms gefunden werden kann, in dem die Komponenten zwei aneinanderstoßende Seiten bilden, während die Resultierende durch die von demselben Eckpunkte ausgehende Diagonale nach Größe und Richtung angegeben wird. Vgl. Fig. 3, worin A der Angriffspunkt, P und Q die Komponenten und R die Resultierende.

Fig. 3.



Der Satz ist eine notwendige Folge des Axioms, daß zwei Bewegungsursachen (Kräfte), die gleichzeitig einwirken, ihren Einfluß auf den Bewegungszustand unabhängig von einander zur Geltung bringen, d. h. daß der mat. P. sowohl der einen als der anderen Folge giebt und daher einen Mittelweg einschlägt (vgl.

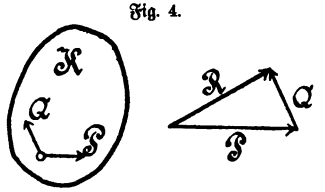
§ 32—34). Man nennt diesen Satz das Prinzip der Superposition.

Es ist vielfach darüber gestritten worden, ob dieses Prinzip a priori richtig sei (d. h. aus unseren Vorstellungen über die Materie und deren fundamentale Eigenschaften mit Notwendigkeit folge) oder ob es einer Bestätigung durch die Erfahrung bedürfe. Da letztere jedenfalls vorliegt, kann die Frage hier offen gelassen werden.

61. Kräftedreieck. Für eine Reihe von wichtigen Anwendungen würde das Zeichnen von Kräfteparallelogr. zu sehr unbehilflichen und schwer zu übersehenden Figuren führen. Es war daher ein sehr wesentlicher Fortschritt, daß an Stelle der Parallelogramme (von Culmann, gest. 1881) die Kräftedreiecke eingeführt wurden.

Es sei K ein Körper, bei dem an einem Punkte A die beiden Kräfte P und Q angreifen. Um deren Resultierende zu bestimmen trage man nebenan in parallel verschobener Lage P und Q in der Richtung ihrer Pfeile aneinander. Die Schlußseite des hierdurch bestimmten Dreiecks giebt alsdann die Größe und Richtung der Resultierenden R an, die am Punkte A wirkend, jene zu ersetzen vermöchte. Beweis ergiebt sich aus der Kongruenz des Kräftedreiecks mit der Hälfte des Parallelogramms, aus dem sich nach vorigem § die Resultierende bestimmen ließe.

Fig. 4.



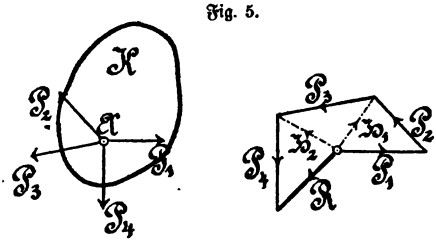
62. Auf Grund des Vorausgegangenen läßt sich der Satz aussprechen: Die Resultierende von zwei an demselben mat. P. angreifenden Kräften ist gleich der graphischen Summe derselben (vgl. § 34) und hat denselben Angriffspunkt wie jene.

63. Wirken mehr als zwei Kräfte an demselben mat. P., so lassen sich zunächst zwei beliebige derselben durch eine Resultierende ersetzen. Setzt man hierauf diese mit einer der anderen zusammen und fährt in derselben Weise fort, so bleibt schließlich eine einzige Kraft übrig, die alle übrigen ersetzt, also deren Resultierende ist.

Um eine möglichst einfache Figur zu erhalten, legt man die einzelnen Kräftedreiecke bei der Ausführung dieser Konstruktion mit den gleichen Seiten aneinander, wie in Fig. 5, wo H_1 die

Resultierende von P_1 und P_2, H_2 diejenige von H_1 und P_3 und R von H_2 und P_4 bedeutet. R ist alsdann die Resultierende aller vier Kräfte, die am Punkte A des Körpers K angreifen. Wenn man will, kann man R in die Zeichnung K mit eintragen, was aber bei den Anwendungen meistens nicht geschieht.

Fig. 5.



Die Reihenfolge, in welcher die Zusammensetzung erfolgte, läßt sich bequem durch folgendes Schema vor Augen führen:

Gegeben: $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$

H_1

H_2

Gefunden: . . . . R.

64. Lehrsatz. Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte zusammengesetzt werden, ist ohne Einfluß auf das Resultat; d. h. bei jeder beliebigen Reihenfolge gelangt man stets zu derselben Resultierenden.

Anl. z. Bew. Hat man die Resultierende nach der Reihenfolge $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ konstruiert und zieht in der betr. Kräftefigur Parallelen zu den Seiten P_2 und P_3, so daß die Parallelen mit jenen Seiten ein Parallelogramm bilden, so geht die Kräftefigur in jene für die Reihenfolge $P_1\,P_3\,P_2\,P_4$ über, wenn man jene Seiten P_2 und P_3 durch ihre Parallelen ersetzt. Hierdurch ist bewiesen, daß man irgend zwei aufeinander folgende Kräfte in der Reihenfolge vertauschen kann, ohne das Resultat zu ändern. Da sich aber durch fortgesetzte Vertauschungen dieser Art jede beliebige Aufeinanderfolge der Kräfte herbeiführen läßt, so folgt der Satz.

65. Die nach § 63 (Fig. 5) aneinander gereihten Kräftedreiecke bilden zusammen ein Polygon, welches man das Kräftepolygon nennt. Die Umfangsseiten desselben bilden die (in der Richtung ihrer Pfeile) graphisch aneinander gereihten Komponenten P und die sog. Schlußseite, welche die Resultierende R darstellt

und einen Pfeil besitzt, welcher entgegengesetzt gerichtet ist dem Umlaufssinne, in welchem die Pfeile der Komponenten aufeinander folgen. Die vom Anfangspunkte ausgehenden Diagonalen geben die bei der Zusammensetzung gebildeten Hilfs- oder Unterresultierenden H an. Für die Anwendungen ist es nicht erforderlich, letztere jedesmal mit einzuzeichnen; es genügt vielmehr meistens, die Umfangsseiten anzugeben.

Das Kräftepolygon kann übrigens auch ein verschränktes sein. Häufig ist eine solche Anordnung sogar die bequemste.

66. Der in § 62 ausgesprochene Satz läßt sich nach dem vorhergehenden zu dem folgenden erweitern:

Erster Hauptlehrsatz. *Greifen an einem mat. P. beliebig viele Kräfte an, so ist deren Resultierende gleich der graphischen Summe der Kräfte.*

67. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß die sämtlichen Kräfte, welche an demselben mat. P. wirken, sich im Gleichgewichte halten. Da sich die Wirkungen aller Kräfte in solchem Falle gegenseitig aufheben, eine Resultierende also nicht existieren kann, so gilt der

Zusatz zum ersten Hauptlehrsatz. *Halten sich beliebig viele Kräfte an einem mat. P. Gleichgewicht, so ist deren graphische Summe gleich Null;* d. h. wenn sie graphisch aneinander gereiht werden, müssen sie ein geschlossenes Polygon ergeben. Die Schlußseite, welche sonst die Größe und Richtung der Resultierenden angiebt, fehlt in dem Kräftepolygone des Gleichgewichtsfalles.

Aufg. 28. Konstruiere die Resultierende von fünf Kräften, die an demselben mat. P. angreifen, wenn die erste horizontal nach rechts gerichtet ist und die übrigen im Sinne des Uhrzeigers die Winkel 60^0, 105^0, 150^0, 270^0 mit der ersten bilden, wenn die Größe der Reihe nach 100, 120, 80, 50, 140 ^{kgr} beträgt.

Aufg. 29. Zeichne für drei gegebene Kräfte, die zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden sollen, sämtliche Kräftepolygone, die durch verschiedene Aufeinanderfolge der Kräfte erhalten werden können; b) dasselbe für vier Kräfte (24 verschiedene Polygone, von denen je 2 einander kongruent sind).

Aufg. 30. Drei sich an einem mat. P. Gleichgewicht haltende Kräfte verhalten sich wie $1 : \sqrt{3} : 2$; welche Winkel bilden ihre Richtungs-

linien miteinander; b) leite einen Lehrsatz ab, welcher die Beziehung zwischen den Größen solcher drei Kräfte und ihren Winkeln allgemein angiebt (trigonometrisch).

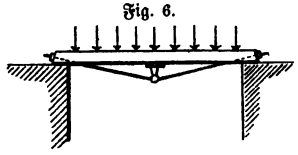
Aufg. 31. Von vier Kräften, die sich an einem mat. P. Gleichgewicht halten, sind zwei vollständig, von den beiden anderen die Richtungslinien gegeben. Ermittle die Größe der letzteren (nach § 67); b) dasselbe für fünf Kräfte.

Aufg. 32. Wenn, wie in der vorigen Aufgabe stillschweigend angenommen, alle Kräfte, die sich Gleichgewicht halten, in derselben Ebene liegen, wie viele lassen sich allgemein der Größe nach bestimmen, wenn die Richtungen aller und die Größen der übrigen gegeben sind?

Aufg. 33. Drei an einem mat. P. angreifende Kräfte stehen im Raume senkrecht aufeinander (wie die von einem Eckpunkte ausgehenden Würfelkanten) und betragen der Reihe nach 30, 50 und 60 kgr. Bestimme deren Resultierende a) durch Konstruktion des (in zwei Projektionen zu zeichnenden, windschiefen) Kräftepolygons; b) durch das Parallelepiped der Kräfte; c) durch Rechnung.

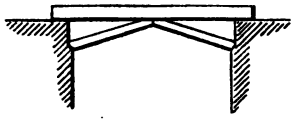
Aufg. 34. Auf einem dreibeinigen Stative ruht eine gegebene Last; bestimme den in der Richtungslinie eines Fußes von diesem auf den Stativkopf ausgeübten Druck; b) wenn die Füße des Stativs auf Rollen stehen, zur Vermeidung einer Drehung derselben um ihre Gelenke aber durch Seile verbunden sind, bestimme die Spannung dieser Seile.

Fig. 6.



Aufg. 35. Ein sog. armierter Balken (Fig. 6) besteht aus einem gewöhnlichen hölzernen oder eisernen Träger, welcher in der Mitte durch einen „Bock" unterstützt ist, der seinerseits durch schmiedeeiserne Stangen, welche von den Enden des Balkens ausgehen, gehalten wird. Wenn die Spannweite 8 m, die Belastung pro laufenden Meter 2000 kgr beträgt und die Vertikalprojektion einer Stange 80 cm lang ist, wie groß ist die Zugkraft, welche in den Stangen übertragen wird?

Fig. 7.

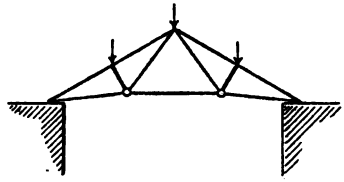


Aufg. 36. Bestimme unter gleichen Verhältnissen die Größe der in den Streben eines gewöhnlichen Sprengwerkes (Fig. 7) übertragenen Kräfte.

Aufg. 37. Bestimme sämtliche Stabspannungen, die in dem sog. Polonceau-Dachbinder (Fig. 8) auftreten, wenn die auf die oberen Knotenpunkte wirkenden Lasten je 3000 kgr betragen, die Spannweite

10 m, die Höhe 3 m und die Entfernung zwischen dem Scheitel und der wagerechten Spannstange 2,70 m beträgt.

Fig. 8.



Anl. z. L. Der Druck zwischen den Auflagerknotenpunkten und ihren Unterlagsplatten beträgt je die Hälfte der Gesamtlast. Man konstruiert zuerst das Kräftedreieck (Gleichgewichtsfall!) für einen Auflagerknotenpunkt, ermittelt dadurch die Spannungen der von diesem ausgehenden Stangen, konstruiert darauf das Kräftepolygon für den nächsten oberen Knotenpunkt, wovon zwei Kräfte bereits bekannt sind, geht dann zum nächsten unteren Knotenpunkte u. s. w.

Anm. Die hier auseinandergesetzte Methode wird mit großem Vorteile für die Berechnung der Stabspannungen in den Dach- und Brückenkonstruktionen verwendet.

Drittes Kapitel.

Projektionen, Momente und Arbeiten der Kräfte.

68. Mit dem ersten Hauptlehrsatze (§§ 66 und 67) lassen sich sämtliche im weiteren Verlaufe vorkommenden Fragen behandeln. In sehr vielen Fällen würde indessen die Lösung eine sehr umständliche und schwierige werden. Man zieht deshalb vor, andere Lehrsätze anzuwenden, die sich aus jenem ableiten lassen (also gewissermaßen den gleichen Gedanken in anderer Form wiedergeben) und sich besser für die jeweilige Anwendung eignen. Wir zählen drei solcher aus dem ersten abgeleitete Hauptlehrsätze. Alle haben das Gemeinsame, daß sie für bestimmte, vorher zu erklärende Hilfsbegriffe (Projektionen, Momente und Arbeiten) auseinandersetzen, in welcher Weise sich für diese die Bedingung aussprechen läßt, daß eine Kraft die Resultierende mehrerer anderer sei oder daß sich mehrere Kräfte Gleichgewicht halten.

69. Kräfteprojektionen. Man denke sich eine beliebige Kraft P, die an einem mat. P. A angreift graphisch dargestellt (§ 58). Hierauf nehme man eine beliebig gerichtete gerade Linie an (die zwar durch A hindurchgehen kann, gewöhnlich aber nicht so ange-

nommen wird) und denke sich sowohl den Punkt A als die Strecke, welche P darstellt, auf jene Gerade (durch rechtwinklige Projektionsstrahlen) projiziert. Der Pfeil von P ist hierbei mit zu projizieren.

Die hierdurch erhaltene Strecke kann als die graphische Darstellung einer Kraft angesehen werden, die an der Projektion von A angreift. Diese Kraft nennt man die Projektion der gegebenen auf die angenommene Richtung. (Wie man leicht einsieht, kommt es nur auf die Richtung der angenommenen Geraden an; eine parallele Verschiebung derselben bringt keine Veränderung in der Projektion hervor.)

70. Anstatt wie vorher die Strecke, welche P darstellt, auf eine Gerade, kann man sie auch (nebst ihrem Angriffspunkte) auf eine beliebige Ebene projizieren und gelangt so zum Begriff der Projektion einer Kraft auf eine Ebene.

71. Unter der Projektion einer Kraft auf eine gegebene Gerade oder Ebene versteht man hiernach eine Kraft, die man sich an jenem Punkte angreifend denkt, in welchem sich der Angriffspunkt der gegebenen Kraft auf die Gerade oder Ebene projiziert, welche ferner der Richtung nach in die Gerade oder Ebene hineinfällt und deren Größe und Pfeil angegeben wird durch die Projektion der Strecke, welche die gegebene Kraft graphisch darstellt, auf die Gerade oder Ebene.

Anm. Steht die Richtung der Kraft senkrecht auf der Geraden oder Ebene, so ist ihre Projektion hiernach gleich Null.

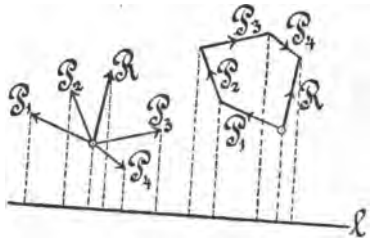
72. Zweiter Hauptlehrsatz. Die Projektion der Resultierenden von mehreren an einem mat. P. angreifenden Kräften auf eine beliebige Gerade (oder Ebene) ist gleich der algebraischen (oder graphischen) Summe der Projektionen aller einzelnen Kräfte auf dieselbe Gerade (oder Ebene).

Anl. z. Bew. Nach dem ersten Hauptlehrsatze (§ 66) ist die Resultierende gleich der graphischen Summe der zusammenzusetzenden Kräfte, d. h. sie wird als Schlußseite des Polygons erhalten, welches sich durch graphisches Aneinanderreihen jener Kräfte ergiebt. Betrachten wir nun zunächst den Fall, daß alle Kräfte auf eine beliebige Ebene projiziert werden sollen, so ist klar, daß jenes

Kräftepolygon, wenn es gleichfalls auf die Ebene projiziert wird, wiederum ein Polygon bildet, dessen Seiten graphische Darstellungen der Kräfteprojektionen sind (gleichlange und gleichgerichtete Strecken haben gleichlange und gleichgerichtete Projektionen), woraus der Satz für die Projektion auf eine Ebene folgt.

In ähnlicher Weise ergiebt sich der Beweis für die Projektion auf eine Gerade. R (Fig. 9) sei die Resultierende der am mat. P. A wirkenden Kräfte P; alle Kräfte seien auf eine beliebige Gerade l projiziert. Dann läßt sich für die Kräfte P und R ein Kräftepolygon konstruieren, das ebenfalls auf l projiziert wird. Legt man der nach rechts gerichteten Projektion positives, der links gerichteten negatives Vorzeichen bei, so ist, wie sofort aus der Figur zu ersehen,

Fig. 9.



$$R' = -P_1' - P_2' + P_3' + P_4',$$

wenn man mit dem oberen Index die Projektionen bezeichnet. Abgekürzt läßt sich dies schreiben

$$R' = \Sigma P' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Anm. Der Buchstabe Σ (großes griechisches S), das sogenannte Summenzeichen, wird mit großem Vorteile für die abgekürzte Anschreibung einer aus mehreren Gliedern bestehenden Summe verwendet. Bei der Anwendung desselben denkt man sich, daß in der Summe jedes Glied mit jenem Vorzeichen zu setzen sei, das ihm nach den zu Grunde gelegten Festsetzungen zukommt. Selbstverständlich müssen in der Summe alle Glieder aufgenommen gedacht werden, die bei der betreffenden Anwendung überhaupt in Betracht kommen. Bei Anwendung von Formel (11) muß also die Summe so viele Glieder enthalten als Kräfte P vorkommen, wobei allerdings einzelne Glieder den Wert Null annehmen können, wenn nämlich die betreffenden Kräfte senkrecht zur Richtung l stehen.

73. Zusatz zum zweiten Hauptlehrsatze. Dieser ergiebt sich, wenn man den Satz auf den Gleichgewichtsfall anwendet. Die Resultierende fällt alsdann fort und der Satz nimmt die einfachere Form an:

Halten sich mehrere Kräfte an einem mat. P. im Gleich-

gewichte, so ist die algebraische Summe ihrer Projektionen auf eine beliebige Gerade gleich Null; ebenso ist die graphische Summe ihrer Projektionen auf eine beliebige Ebene gleich Null.

Beispiel. Ein Gewicht Q sei durch zwei Fäden aufgehängt. An dem Aufhängepunkte wirken alsdann drei Kräfte, die sich Gleichgewicht halten, nämlich außer dem Gewichte Q die beiden Fadenspannungen der Aufhängefäden. Denkt man sich diese Kräfte auf die horizontale Richtung projiziert, so muß nach dem obigen Satze die Horizontalprojektion der einen Fadenspannung gleich und entgegengesetzt gerichtet sein derjenigen der anderen Fadenspannung (damit ihre algebraische Summe zu Null werde). Dehnt man diese Überlegung weiter aus, so ergiebt sich, daß eine beliebige Kette (z. B. einer Hängebrücke) oder ein Seil, das irgendwie verteilte Lasten trägt, an jedem Punkte so gespannt ist, daß die Horizontalprojektion überall dieselbe Größe hat. Die Spannungen an den verschiedenen Stellen verhalten sich demnach zu einander umgekehrt wie die cos der Neigungswinkel.

74. Statisches Moment der Kräfte. An einem mat. P. A wirke irgend eine Kraft P. Irgendwo wähle man einen beliebigen Punkt O aus (derselbe wird in der Folge der Momentenpunkt genannt) und fälle von demselben ein Perpendikel auf die Richtung von P. Dieses Perpendikel (in der Folge mit p bezeichnet) wird der Hebelarm der Kraft P in Bezug auf den gewählten Momentenpunkt O genannt. Unter dem statischen Momente (oder Momente kurzweg) der Kraft P in Bezug auf O versteht man das Produkt $P.p$ aus der Kraft und ihrem von O aus gemessenen Hebelarm.

Die Einheit, in welcher das statische Moment anzugeben ist, hängt ab von den für die Kräfte und für die Längen gewählten Einheiten. So hat eine Kraft von 5^{kgr} mit einem Hebelarme von 3^{m} das statische Moment 15^{mkgr}.

Aufg. 38. Wie groß ist das statische Moment einer Kraft von 300^{gr} und 60^{cm} Hebelarm ausgedrückt a) in cmgr, b) in mkgr, c) in Fußpfunden, wenn 1 Fuß $= 0{,}314^{m}$ und 1 Pfund $= 0{,}5^{kgr}$?

75. Den statischen Momenten legt man verschiedene Vorzeichen bei. Es ist üblich geworden, das Moment einer Kraft positiv zu rechnen, wenn von dem Momentenpunkte aus gesehen der Pfeil der Kraft die Richtung nach rechts hat. Im umgekehrten Falle ist es negativ zu setzen.

Aufg. 39. Zeichne verschiedene Kräfte hin und gieb alsdann für

verschiedene Lagen des Momentenpunktes an, welche Kräfte in jedem Falle positives, welche negatives Moment haben.

76. Lehrsatz. Die Fläche des Dreiecks, welches die Strecke, die die Kraft P graphisch darstellt, zur Grundlinie und den Momentenpunkt zur Spitze hat, kann als graphische Darstellung des Momentes von P angesehen werden, wobei der Maßstab, nach dem die Dreiecksfläche auszumessen ist, um die Größe des Momentes zu erhalten, aus dem verwendeten Kräfte- und dem Verjüngungsmaßstabe der Zeichnung abzuleiten ist.

Anl. z. Bew. Die Dreiecksfläche ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe. Die Höhe ist hier der Hebelarm, die Grundlinie die graphische Darstellung der Kraft. Dem entsprechend ist der Maßstab zu wählen.

Aufg. 40. Wenn in einer Zeichnung der Kräftemaßstab $1^{mm} = 12^{kgr}$, der Längen- (oder Verjüngungs-) Maßstab $= 1:20$ ist, welches ist der Maßstab, nach dem jene Dreiecksflächen auszumessen sind, um die bezügl. Momente zu erhalten; b) wenn ein solches Dreieck 12^{qcm} Fläche hat, wie groß ist das durch sie dargestellte Moment?

77. Geht die Richtung einer Kraft durch den gewählten Momentenpunkt hindurch, so wird der Hebelarm und daher auch das statische Moment zu Null, desgleichen die dasselbe darstellende Dreiecksfläche.

Anm. Während bei den Kräfteprojektionen (§ 69) eine Gerade beliebig zu wählen war, auf welche sich die Projektion bezieht, ist bei den statischen Momenten in gleicher Weise ein Momentenpunkt beliebig zu wählen, auf welchen sich das Moment bezieht. Es liegt daher etwas Gemeinsames in diesen Begriffen; man kann sagen, daß dort die Kräfte in ihrer Beziehung zu irgend einer Richtung, hier in Beziehung zu irgend einem Punkte betrachtet werden.

78. Hilfssatz aus der Geometrie. Der dritte Hauptlehrsatz ergiebt sich auf sehr einfache Weise aus dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte, wenn man eine allgemeine geometrische Eigenschaft des Parallelogramms in Betracht zieht, die der nachfolgende geometrische Lehrsatz (der in den geometrischen Lehrbüchern nur selten besprochen wird) feststellt.

Verbindet man einen in der Ebene eines Parallelogramms beliebig gelegenen Punkt O mit den Eckpunkten desselben, so ist das über einer Diagonale entstandene

Dreieck entweder gleich der Summe oder gleich der Differenz der Dreiecke, welche über den beiden von einem Endpunkte der Diagonale ausgehenden Seiten gebildet werden, je nachdem der Punkt O in einem Nebenwinkelraume des von jenen Seiten gebildeten Winkels oder andernfalls in diesem Winkelraume selbst oder im Scheitelwinkelraume liegt.

Fig. 10a.

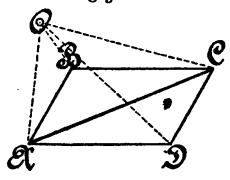
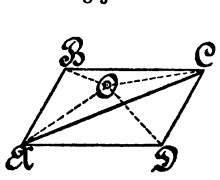


Fig. 10b.



V.: $ABCD$ (Fig. 10a und 10b) ein Parallelogramm.
Beh.: $\triangle OAC = \triangle OAD + \triangle OAB$ (Fig. 10a) oder
$\triangle OAC = \triangle OAD - \triangle OAB$ (Fig. 10b).

Anl. z. Bew. In Fig. 10a ist

$$\triangle OAC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle ABC$$

$$\triangle OBC + \triangle ABC = \triangle OAD,$$

denn bei gleicher Grundlinie ($BC = AD$) ist die Höhe des letztgenannten $\triangle$ gleich der Summe der Höhen der beiden anderen; daher

$$\triangle OAC = \triangle OAB + \triangle OAD, \text{ w. z. b. w.}$$

Ebenso ist in Fig. 10b:

$$\triangle OAC = \triangle ABC - \triangle OBC - \triangle OAB$$

$$\triangle ABC - \triangle OBC = \triangle OAD;$$

denn bei gleicher Grundlinie ($BC = AD$) ist die Höhe des letztgenannten gleich der Differenz der Höhen der beiden anderen; daher

$$\triangle OAC = \triangle OAD - \triangle OAB, \text{ w. z. b. w.}$$

In derselben Weise läßt sich der Beweis für alle anderen möglichen Lagen des Punktes O führen.

79. Dritter Hauptlehrsatz (Momentensatz). Das statische Moment der Resultierenden von mehreren an einem mat. P. angreifenden und in derselben Ebene liegenden Kräften in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Momentenpunkt ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller dieser Kräfte.

Anl. z. Bew. a) Für die Resultierende aus zwei Kräften. Man zeichne das Kräfteparallelogramm (§ 60) und verbinde den beliebig gewählten Momentenpunkt mit den Eckpunkten desselben. Die Dreiecke, welche hierbei über der Diagonale und den beiden Seiten

entstehen, durch welche die Kräfte dargestellt werden, lassen sich als Darstellungen der statischen Momente ansehen (§ 76). Hierauf wendet man den Satz in § 78 an und nimmt dabei gehörige Rücksicht auf die den Momenten zukommenden Vorzeichen (§ 75), woraus sich der Satz ergiebt.

b) Für die Resultierende aus mehr als zwei Kräften ergiebt sich der Satz durch wiederholte Anwendung des unter a) Bewiesenen.

80. Bezeichnet man die zusammenzusetzenden Kräfte mit $P_1 P_2 P_3$ u. s. w., die Resultierende mit R und die Hebelarme mit den entsprechenden kleinen Buchstaben, so läßt sich der Momentensatz unter Benutzung des Summenzeichens (§ 72, Anm.) schreiben

$$Rr = \Sigma Pp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

81. Zusatz I zum dritten Hauptlehrsatze. Derselbe ergiebt sich durch Anwendung des Lehrsatzes auf den Gleichgewichtsfall.

Halten sich an einem mat. P. mehrere in derselben Ebene liegende Kräfte das Gleichgewicht, so ist für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Momentenpunkt die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null; oder in Zeichen

$\Sigma Pp = 0$, wenn Gleichgewicht besteht.

82. Zusatz II zum dritten Hauptlehrsatze. Liegen die Richtungen der Kräfte, die zu einer Resultierenden zusammengesetzt sind, oder deren Gleichgewicht betrachtet werden soll, nicht in derselben Ebene, so ist der Lehrsatz nicht unmittelbar zu verwenden. Projiziert man dagegen alle Kräfte sowie ihren Angriffspunkt auf eine beliebige Ebene, so läßt sich der Lehrsatz für jeden beliebigen Punkt dieser Ebene als Momentenpunkt auf die erhaltenen Kräfteprojektionen zur Anwendung bringen, da nach § 72 die Projektion der Resultierenden gleich der graphischen Summe der Projektionen der Komponenten ist. Man gelangt daher zu dem Satze:

Greifen an einem mat. P. mehrere beliebig im Raume gerichtete Kräfte an, die entweder zu einer Resultierenden zusammengesetzt sind oder sich Gleichgewicht halten, so gilt für jede auf einer beliebigen Ebene erhaltene Projektion derselben und in Bezug auf jeden Punkt in dieser Ebene als Momentenpunkt der Momentensatz.

Anm. Häufig spricht man von statischen Momenten in Bezug auf eine Momentenachse (anstatt des Momentenpunktes). Unter dem Hebelarm ist alsdann die kürzeste Entfernung zwischen der gewählten Achse und der Kraftrichtung zu verstehen. Liegen diese beiden Linien nicht windschief zu einander, so ist das Moment gleich Null zu setzen. Ein Eingehen auf Momente nach dieser Definition ist aber durch den eben ausgesprochenen Satz überflüssig geworden. Denkt man sich durch den Momentenpunkt, der im Satze (§ 82) vorkommt, eine Senkrechte zur Projektionsebene gelegt, so repräsentiert diese sofort die Momentenachse, für welche die Momente von derselben Größe sind wie für jenen Punkt.

83. Lehrsatz. Liegen mehrere Kräfte, die an einem mat. P. wirken, in derselben Ebene und ist deren Momentensumme für zwei verschiedene Punkte dieser Ebene (unter denen sich der Angriffspunkt nicht befinden darf und die mit diesem nicht in einer Geraden liegen) gleich Null, so halten sich die Kräfte Gleichgewicht.

Anl. z. Bew. Würden die Kräfte nicht Gleichgewicht halten, so müßten sie eine Resultierende besitzen, deren Moment gleich der Summe der Momente der Komponenten sein müßte. Nun könnte zwar für einen jener Punkte die Momentensumme gleich Null sein (wenn er nämlich auf der Resultierenden enthalten wäre), nicht aber für beide.

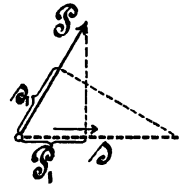
84. Arbeit der Kräfte. Ein mat. P. A, an dem irgend eine Kraft P wirkt, möge sich bewegen. Man spricht dann von der Arbeit, welche die Kraft P während dieser Bewegung verrichtet habe. Fällt die Bewegungsrichtung zusammen mit der Kraftrichtung, so versteht man unter Arbeit der Kraft das Produkt $P.s$ aus der Kraft P und dem Wege s ihres Angriffspunktes A. Bilden dagegen beide Richtungen einen beliebigen Winkel mit einander, so ist unter der Arbeit das Produkt aus dem Wege und der Projektion der Kraft auf die Wegerichtung zu verstehen.

Die Einheit der Arbeit ist hiernach gleichartig mit der Einheit des statischen Momentes.

85. Den Arbeiten legt man verschiedene Vorzeichen bei. Wenn Bewegungs- und Kraftrichtung zusammenfallen oder auch wenn die Projektion der Kraft gleiche Richtung mit der Bewegung besitzt, rechnet man die Arbeiten positiv, bei entgegengesetzten Richtungen negativ.

Aus der Definition ergiebt sich, daß die Arbeit gleich Null zu setzen ist, wenn Kraft und Weg senkrecht zu einander stehen. Dasselbe gilt natürlich, wenn der Angriffspunkt in Ruhe bleibt, obschon der Körper, dem er angehört, sich bewegt (um diesen Punkt rotiert).

Fig. 11.



86. Lehrsatz. Das Produkt aus dem Wege und der Projektion der Kraft auf die Wegerichtung ist gleich dem Produkte aus der Kraft und der Projektion des Weges auf die Kraftrichtung. Jedes dieser Produkte giebt hiernach die Größe der geleisteten Arbeit an.

V.: P_1 Projektion von P, s_1 Projektion von s (Fig. 11).

Beh.: $Ps_1 = P_1 . s$.

Anl. z. Bew.: $\triangle PP_1 \sim \triangle ss_1$, daher

$$\frac{P}{P_1} = \frac{s}{s_1} \text{ oder } Ps_1 = P_1 . s.$$

87. Wird der Winkel zwischen Kraft- und Wegerichtung kurzweg mit $\sphericalangle Ps$ bezeichnet, so läßt sich nach den gegebenen Definitionen die geleistete Arbeit A setzen

$$A = P . s \cos (Ps) . . . . . \quad (13)$$

88. Wenn entweder die Kraft während der Ausführung der Bewegung ihre Größe oder Richtung ändert oder wenn die Bahn des Punktes krummlinig ist, muß man sich die Bewegung in sehr kleine aufeinander folgende Bewegungen zerlegt denken, so daß für jede dieser sowohl die Bewegungsrichtung als auch die Richtung und Größe der Kraft als konstant angesehen werden kann. Die Gesamtarbeit ist alsdann gleich der Summe aller während Ausführung dieser sehr kleinen Bewegungen geleisteten Arbeiten, oder wie man sich ausdrückt gleich der Summe der Elementararbeiten.

Aufg. 41. Der Dampfdruck auf den Kolben einer Dampfmaschine betrage 400 kgr; wie groß ist die Arbeit des Dampfdruckes bei einem Kolbenhube von 40 cm Länge, wenn eine Änderung des Dampfdruckes während der Bewegung nicht stattfindet?

89. Arbeitsdiagramm. Darunter versteht man eine Zeichnung, deren Grundlinie den vom Angriffspunkte der Kraft zurückgelegten Weg angiebt, während an jeder Stelle senkrecht zur Grundlinie

die Größe der in die Bewegungsrichtung fallenden Projektion der Kraft angegeben ist, so wie sie an der diesem Punkte entsprechenden Stelle der Bahn stattfand.

Sehr häufig gebraucht sind die sog. Indikatordiagramme für die Untersuchung von Dampfmaschinen. Dieselben sind Arbeitsdiagramme, welche den Weg des Kolbens zur Grundlinie und an jedem Punkte eine solche Höhe haben, wie sie dem Dampfdrucke entspricht, welcher bei dieser Kolbenstellung auf den Kolben wirkt. Sie werden durch ein besonderes Instrument, den Indikator, selbstthätig verzeichnet. Der Indikator wird auf die zu untersuchende Maschine aufgeschraubt und kommuniziert alsdann mit dem Innern des Dampfcylinders.

90. Lehrsatz. Der Inhalt des Arbeitsdiagramms giebt unter Berücksichtigung der gewählten Maßstäbe die während der Bewegung geleistete Arbeit an.

Anl. z. Bew. Man denke sich den Weg in sehr kleine Teile (Elemente) zerlegt. Das Produkt aus jedem Wegeteilchen und der in die Wegerichtung fallenden Kraft (oder Kraftprojektion) stellt die diesem Wegeelemente entsprechende Elementararbeit, andererseits aber auch den Inhalt des Diagrammstreifens dar, welcher dem bezüglichen Wegeelemente in dem Diagramme entspricht. Durch Summierung ergiebt sich daher die Behauptung.

91. Pferdestärke. Wird eine Bewegung in stets gleicher Wiederholung sehr lange Zeit hindurch ausgeführt (wie dies z. B. beim Gange einer Dampfmaschine zutrifft), so daß von der treibenden Kraft in der doppelten Zeit wegen des dann doppelten Weges auch die doppelte Arbeit geleistet wird, so empfiehlt es sich, die Arbeitsleistung auf die Zeiteinheit zu beziehen. Man ist übereingekommen, eine längere Zeit hindurch gleichmäßig fortdauernde Arbeitsleistung, die für jede Sekunde 75 ^{mkgr} beträgt, eine Pferdekraft oder Pferdestärke (abgekürzt gewöhnlich *P.S* oder auch *H.P*, letzteres horse power, geschrieben) zu nennen.

Aufg. 42. Ein Bach hat ein sekundliches Wasserquantum von 200 ^{l}; wenn ein Gefälle von 3 ^{m} durch ein Wasserrad ausgenützt werden soll, wie groß ist die Bruttogröße dieser Wasserkraft in Pferdestärken ausgedrückt? (Die Arbeit leistende Kraft ist in diesem Falle die Schwere des herabsinkenden Wassers.)

Aufg. 43. Für die Wasserversorgung einer Stadt von 80 000 Einwohnern muß das zur Verfügung stehende Wasser in ein Reservoir

gepumpt werden, das 30 m über dem Unterwasserspiegel liegt. Wenn pro Kopf der Bevölkerung 220 l täglich gerechnet werden, wieviel Arbeit muß geleistet werden, um das Wasser hinaufzupumpen und wieviel Pferdekräfte müssen die treibenden Dampfmaschinen besitzen?

92. Vierter Hauptlehrsatz. (Satz von der Arbeit der Kräfte.) Greifen an einem mat. P. mehrere Kräfte an, so ist die Arbeit der Resultierenden derselben für irgend eine Bewegung des mat. P. gleich der algebraischen Summe der Arbeiten aller Komponenten.

Anl. z. Bew. Man denke sich alle Kräfte auf die augenblickliche Bewegungsrichtung des Angriffspunktes projiziert. Dann ist nach dem II. Hauptlehrsatze (§ 72, Gl. 11)

$$R' = \Sigma P',$$

worin die Buchstaben dieselbe Bedeutung wie früher haben. Multipliziert man in dieser Gleichung jedes Glied mit dem Wege s, so erhält man

$$R'.s = \Sigma P'.s.$$

Die einzelnen Glieder geben aber hierin die Arbeiten der bezüglichen Kräfte an. Der Satz ist damit für jede Elementarbewegung des mat. P. bewiesen und gilt auch für jede beliebig gestaltete Bewegung, da sich diese stets in Elemente zerlegen läßt.

93. Zusatz zum vierten Hauptlehrsatze. Prinzip der virtuellen Arbeiten. Halten sich die Kräfte P im Gleichgewichte, so kann trotzdem eine beliebige Bewegung des Angriffspunktes gedacht werden, wenn derselbe schon vorher eine gewisse Geschwindigkeit besaß oder auch eine Bewegung, die durch eine andere, nicht unter den P enthaltene Kraft hervorgerufen wird. Wendet man den Lehrsatz auf diesen Fall an, so vereinfacht er sich in der folgenden Weise:

Halten sich mehrere Kräfte an einem in Bewegung befindlichen mat. P. im Gleichgewichte, so ist die algebraische Summe der Arbeiten dieser Kräfte gleich Null.

In dieser Form nannte man den Satz das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten oder auch der virtuellen Momente oder besser gesagt der virtuellen Arbeiten. Schon von Galilei benutzt, wurde der Satz von dem berühmten Mathematiker Lagrange (geb. 1736, gest. 1813) zur Grundlage

seines ganzen Lehrgebäudes der Mechanik gemacht, in derselben Weise wie der heutigen Darstellung der Mechanik der Satz vom Parallelogramm der Kräfte zu Grunde liegt. Nach dem, was in § 68 gesagt wurde, kann es nicht überraschen, daß, wenn irgend einer der vier Hauptlehrsätze zu Grunde gelegt wird, alle übrigen sich ableiten lassen.

Zweiter Abschnitt.

Mechanik der starren Körper. I.

Erstes Kapitel.

Die vier Hauptlehrsätze, übertragen auf starre Körper.

94. Begriff des starren Körpers. Unter einem starren Körper versteht man einen solchen Körper, dessen Massenteilchen (oder mat. P.) so mit einander verbunden sind, daß sie ihre gegenseitigen Entfernungen unter keinen Umständen ändern können. Mit anderen Worten: die mat. P., welche einen starren Körper bilden, können unter keinen Umständen eine relative Bewegung gegen einander ausführen. Der starre Körper kann hiernach als das Ideal eines festen Körpers bezeichnet werden.

95. Im Grunde genommen giebt es in der Natur gar keine starren Körper. Selbst der härteste Stein, das härteste Metall verändert unter dem Einfluß sehr großer Kräfte (oder unter dem Einfluß der Wärme) seine Form. Wir können aber einen Körper stets dann als einen starren behandeln, wenn er nur bei dem Vorgange, den wir gerade betrachten, in keiner Weise einer Formänderung unterworfen ist. Es ist alsdann völlig gleichgiltig, wie er sich bei anderen Gelegenheiten verhalten würde.

96. Ebene Bewegung des st. K. Fast alle Bewegungen von st. K., die wir in der Folge ins Auge zu fassen haben, sind ebene Bewegungen, also solche, bei denen jeder mat. P. des Körpers fortwährend in derselben Ebene bleibt (§ 3). Um den Bewegungs-

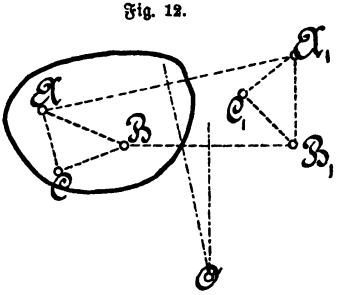
vorgang vollständig zu erkennen genügt es in diesem Falle, die Bewegung in irgend einer dieser (zu einander parallelen) Ebenen näher zu betrachten.

97. Die einfachsten ebenen Bewegungen sind die rotatorische oder drehende und die translatorische oder fortschreitende. Bei der ersteren beschreiben alle mat. P. des Körpers Kreise, mit Ausnahme derjenigen, welche mit den Kreismittelpunkten zusammenfallen. Diese hierbei in Ruhe verbleibenden Punkte liegen auf einer geraden Linie, die man die Drehachse (oder kurz Achse) nennt, und welche senkrecht zu den Ebenen steht, in welche die Kreisbahnen fallen. Bei der translatorischen Bewegung beschreiben alle mat. P. parallele Bahnen.

98. Lehrsatz. Die ebene Bewegung eines st. K. ist vollständig bekannt, wenn man die Bewegungen von zwei mat. P. desselben kennt (deren Verbindungslinie jedoch nicht senkrecht zu den Ebenen stehen darf, in welchen die Bewegung erfolgt).

Anl. z. Bew. Man denke sich den Körper in der Anfangslage auf eine Ebene projiziert, welche denjenigen Ebenen parallel ist, in welchen die Bewegung erfolgt. A und B (Fig. 12) seien die Punkte, deren Bewegung bekannt ist in der Anfangslage, A_1 und B_1 in einer der folgenden Lagen. Betrachten wir nun irgend einen Punkt C, so läßt sich leicht die spätere Lage desselben durch Konstruktion des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ angeben, welches kongruent mit ABC sein muß, weil der Körper n. V. starr ist. Dasselbe gilt für jeden anderen Punkt und für jede andere Lage.

Fig. 12.



99. Lehrsatz. Betrachten wir zwei beliebige Lagen eines st. K., der eine ebene Bewegung ausführt, so läßt sich derselbe stets durch eine Rotation um eine gewisse Achse aus der einen Lage in die andere überführen.

Anl. z. Bew. Denken wir uns in Fig. 12 die senkrechten Halbierungslinien von AA_1 und BB_1 gezogen, deren Schnittpunkt

O sei und hierauf den Körper um die dem Punkte O entsprechende (zur Projektionsebene senkrechte) Achse gedreht bis A nach A_1 gekommen ist, so kommt auch B nach B_1, weil $\triangle ABO \cong \triangle A_1B_1O$ und beide hierbei zur Deckung kommen. Daher kommt auch C hierbei nach C_1, weil $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Es kommt bei der Drehung also jeder Punkt in die ihm zugewiesene Lage.

100. Pol der Bewegung. Fassen wir eine ganz beliebige ebene Bewegung eines starren Körpers ins Auge, so kann man nach dem soeben Bewiesenen dieselbe als eine stetige Aufeinanderfolge von Rotationen um Drehachsen auffassen, deren Lagen fortwährend wechseln. Aus jeder Lage kann man sich nämlich den Körper in die unmittelbar folgende durch eine sehr kleine Rotation um eine bestimmte Achse, aus dieser in die darauf folgende wieder durch eine Rotation um eine Achse übergeführt denken, welch letztere im allgemeinen nicht mit der früheren zusammenfällt. Die Achse, um welche man sich den Körper in einem bestimmten Augenblicke gedreht denken muß, damit er in die nächstfolgende Lage gelange, wird die Momentanachse, ihre Projektion auf die Projektionsebene der augenblickliche Pol der Bewegung genannt (in Fig. 12 Punkt O).

Anm. Den Pol einer translatorischen Bewegung hat man sich in unendlich großer Entfernung zu denken.

Aufg. 44. Gieb für verschiedene Stellungen der Kurbelstange einer Dampfmaschine den Pol der Bewegung an.

Anl. z. Lösung. Das eine, mit der Kolbenstange drehbar verbundene Ende der Kurbelstange ist gezwungen, eine geradlinige Bahn zu beschreiben, das andere beschreibt einen Kreis, der die Kurbellänge zum Radius hat. Der augenblickliche Pol ergiebt sich als Schnittpunkt der Normalen, welche von den Stangenenden zu den eigenen Bahnen derselben gezogen werden können. Beweis!

Aufg. 45. Ein Kreisel drehe sich und bewege sich zugleich geradlinig weiter; ermittele für einen bestimmten Fall die Lage der Momentanachse.

101. Polbahnen. Um die Art der ebenen Bewegung eines st. K. vollständig zu beschreiben genügt es, alle Pole, um die er sich der Reihe nach dreht und für jeden Pol die zugehörige Winkelgeschwindigkeit (§ 9) der Drehung anzugeben.

Der Pol wird während des Verlaufs der Bewegung seinen Ort im allgemeinen stetig ändern. Die stetige Aufeinanderfolge der verschiedenen Lagen des Poles wird eine Polbahn genannt und zwar diese die ruhende Polbahn. Zu jeder ruhenden Polbahn gehört eine mit dem bewegten Körper fest verbunden zu denkende bewegte Polbahn. Man versteht darunter die stetige Aufeinanderfolge derjenigen Punkte des von dem starren Körper aus auszumessenden Raumes, welche der Reihe nach mit den Polen zusammenfallen.

Aus dem Vorausgehenden ergiebt sich, daß man sich jede beliebige ebene Bewegung eines st. K. durch Rollen der beiden Polbahnen aufeinander hervorgebracht denken kann. Durch Angabe der beiden Polbahnen ist der geometrische Charakter der betrachteten Bewegung vollständig und eindeutig bestimmt und zwar in der anschaulichsten und übersichtlichsten Art.

102. Polbahnen der Relativbewegung. Hat man zwei st. K. zu betrachten, die gleichzeitig ebene Bewegungen ausführen, z. B. zwei gewöhnliche im Eingriffe mit einander stehende Zahnräder (Stirnräder), so ist es häufig von Vorteil (z. B. um die richtige Form der Zähne dieser Räder festzustellen), die Relativbewegung des einen gegen den ruhend zu denkenden anderen ins Auge zu fassen (§ 29). Auch für solche Fälle lassen sich Polbahnen angeben und durch sie die stattfindende Relativbewegung beschreiben.

Während z. B. die Absolutbewegungen jener Zahnräder einfache Rotationen sind, die Polbahnen also zu Punkten zusammengeschrumpft sind, sind die Polbahnen für die Relativbewegung des einen Rades gegen das andere bei richtig verzahnten Rädern Kreise, deren Mittelpunkte mit den Radmittelpunkten zusammenfallen und deren Radien sich wie die Zähnezahlen verhalten. Diese für die Theorie der Zahnräder sehr wichtigen Kreise werden die Teilkreise derselben genannt.

Aufg. 46. Konstruiere die Polbahnen für die Bewegung der in Aufg. 44 erwähnten Kurbelstange.

103. Räumliche Bewegungen. Die allgemeine räumliche Bewegung eines st. K. läßt sich in ähnlicher Weise behandeln wie die ebene Bewegung. Es macht dies aber mehr Schwierigkeiten und soll daher hier nicht näher ausgeführt werden. Von besonderem Interesse ist hierbei die Bewegung eines st. K. um einen

festen Punkt, um den er sich nach jeder Richtung frei drehen kann (Kugelgelenk). Man kann leicht zeigen, daß für eine derartige Bewegung sich Polbahnen angeben lassen, die auf einer Kugelfläche liegen, welche den Drehpunkt zum Mittelpunkte hat.

Die wichtigste räumliche Bewegung ist die schraubenförmige. Dieselbe entsteht durch Kombination einer fortschreitenden mit einer um eine am Körper festen Achse drehenden Bewegung. Man kann beweisen, daß jede beliebige räumliche Bewegung als eine stetige Aufeinanderfolge sehr kleiner (Elementar-) Schraubenbewegungen, bei denen die Achse fortwährendem Wechsel unterworfen ist, sich ansehen läßt.

104. Kräfte am st. K. Nach der in § 37 gegebenen Erklärung haben wir unter Kräften nur Bewegungsantriebe zu verstehen, die an mat. P. wirken. Wenn man von den Kräften redet, die an einem st. K. wirken, so versteht man darunter diejenigen, welche an den mat. P. angreifen, welche den Körper zusammensetzen. Gewöhnlich denkt man hierbei nur an die äußeren Kräfte, an diejenigen also, welche auf die einzelnen Teile des betrachteten Körpers von anderen, fremden Körpern ausgeübt werden. Von den inneren Kräften wird sich zeigen, daß sie auf den Bewegungszustand des st. K. keinen Einfluß haben.

105. Resultierende von Kräften am st. K. Greifen zwei Kräfte an demselben mat. P. eines st. K. an, so kann deren Zusammensetzung zu einer Resultierenden einfach nach den Lehren des vorigen Abschnittes bewirkt werden. Man redet aber auch von Resultierenden solcher Kräfte, die an verschiedenen mat. P. desselben Körpers angreifen. Freilich sind diese wesentlich anders zu beurteilen als jene.

Während die Resultierende von Kräften, die an demselben mat. P. wirken, diese vollständig ersetzt, lassen sich zwei an verschiedenen mat. P. angreifende Kräfte überhaupt nicht vollständig durch eine einzige ersetzen.

Man versteht vielmehr unter der Resultierenden zweier solcher Kräfte jene Kraft, welche diese in Hinsicht auf den äußeren Bewegungszustand ersetzt (während in Hinsicht auf die Verteilung der inneren Kräfte eine Änderung eintritt). In allen solchen Fällen

dagegen, bei denen die Größe und Verteilung der inneren Kräfte in Frage kommt (wie bei Aufgaben aus der Festigkeitslehre), muß man sich hüten, eine Resultierende unter allen Umständen als wirklich gleichwertigen Ersatz der an verschiedenen mat. P. angreifenden Kräfte anzusehen.

106. Übertragung der Hauptlehrsätze auf Kräfte, die an st. K. wirken. Um zu erkennen, unter welchen Umständen eine Kraft sich als die Resultierende von mehreren anderen ansehen läßt, die an verschiedenen mat. P. desselben st. K. wirken, oder unter welchen Umständen solche Kräfte sich im Gleichgewichte halten, sind die im vorigen Abschnitte abgeleiteten vier Hauptlehrsätze auf den hier vorliegenden Fall zu übertragen.

Diese Übertragung wird durch die folgende Überlegung als möglich erkannt.

Jeden Körper können wir uns aus kleinsten Teilchen, also aus mat. P. aufgebaut denken. Würde zwischen diesen kein Zusammenhang bestehen, so müßte sich jeder mat. P. den Kräften gemäß bewegen, die nur an ihm allein wirken. Bei einem starren Körper besteht aber zwischen den Teilchen, aus denen er sich aufbaut, ein solcher Zusammenhang, welcher relative Lagenänderungen dieser Teilchen gegen einander ausschließt, vielmehr nur eine Bewegung des Körpers als Ganzes gestattet. Daraus geht hervor, daß zwischen den einzelnen mat. P. des Körpers in jedem Falle Kräfte übertragen werden, welche die Bewegungen derselben so beeinflussen, daß keine Änderungen der relativen Lage möglich sind.

Wir müssen also die wirklich erfolgende Bewegung irgend eines am Körper befindlichen mat. P. ansehen als hervorgebracht durch alle an ihm zugleich wirkenden äußeren und inneren Kräfte, oder auch als hervorgebracht durch die Resultierende aller dieser Kräfte; sie lassen sich nämlich jedenfalls zu einer Resultierenden zusammensetzen, da sie alle an demselben mat. P. wirken.

Soll nun eine Kraft als Resultierende von mehreren anderen angesehen werden können, die an verschiedenen mat. P. eines st. K. wirken, so muß es in Hinsicht auf den äußeren Bewegungszustand des Körpers völlig gleichgiltig sein, ob diese einwirkt oder ob jene einwirken, d. h. es muß für jeden beliebigen mat. P. des Körpers

in beiden Fällen dieselbe Resultierende aller an ihm wirkenden äußeren und inneren Kräfte zu stande kommen.

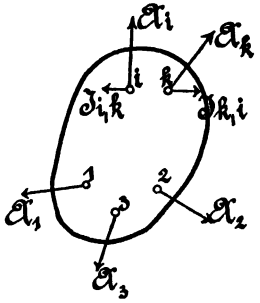
Sollen dagegen irgendwelche äußeren Kräfte an einem st. K. sich Gleichgewicht halten, so dürfen sie auf den Bewegungszustand desselben gar keinen Einfluß haben. Es muß also auch für jeden mat. P. des Körpers jeder Bewegungsantrieb wegfallen, d. h. die Resultierende aus der an ihm etwa wirkenden jener äußeren Kräfte und aller auf ihn übertragenen inneren Kräfte muß gleich Null sein.

Hält man diese Überlegung fest und wendet auf jeden einzelnen mat. P. des Körpers einen der früher bewiesenen Hauptlehrsätze an, so gelangt man ohne Schwierigkeit zu dem Resultate, daß der betreffende Satz auch für den ganzen Körper giltig sein muß.

Hierbei ist noch fortwährend zu beachten, daß Kräfte nur paarweise auftreten können (§ 39), daß also jeder inneren Kraft, die auf irgend einen mat. P. von einem anderen (benachbarten) übertragen wird, eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete innere Kraft an diesem letzteren gegenübersteht. Zieht man alle inneren Kräfte in Betracht, die an sämtlichen mat. P. des Körpers wirken, so ergiebt sich hieraus in jedem Falle, daß die inneren Kräfte sich aus den Lehrsätzen hinwegheben.

107. Erster Hauptlehrsatz für Kräfte, die am st. K. sich Gleichgewicht halten. Halten sich mehrere Kräfte an einem st. K. im Gleichgewichte, so ist ihre graphische Summe gleich Null.

Fig. 13.



Anl. z. Bew. Die an dem mat. P. wirkenden äußeren Kräfte seien mit $A_1 A_2$ u. s. w. bezeichnet (vgl. Fig. 13). Die auf irgend einen mat. P. i von dem mat. P. k ausgeübte innere Kraft sei mit $I_{i,k}$ bezeichnet. Nach dem Prinzipe der Aktion und Reaktion (§ 39) muß dann auf k eine Gegenkraft ausgeübt werden, die mit jener gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. Es sei dies dadurch ausgedrückt, daß wir schreiben

$$I_{k,i} = -I_{i,k}.$$

Zum Gleichgewichte des ganzen Körpers gehört, daß jeder

mat. P. desselben im Gleichgewichte sei. Aus allen Kräften, die an dem mat. P. i wirken, muß sich daher ein geschlossenes Kräftepolygon konstruieren lassen (§ 67). Wir denken uns für jeden mat. P. dieses Polygon und zwar jedesmal von demselben Anfangspunkte aus konstruiert, zu dem man jedesmal wieder zurückkommt. Daraus zeigt sich zunächst, daß die graphische Summe aller äußeren und inneren Kräfte, die an allen mat. P. des ganzen Körpers wirken, gleich Null ist. Da aber (§ 64) die Reihenfolge der graphischen Summierung geändert werden kann, so denke man sich zunächst alle inneren Kräfte aneinander gereiht und zwar so, daß auf irgend eine innere Kraft z. B. $I_{i,k}$ jedesmal ihre Gegenkraft, hier $I_{k,i}$ folgt. Nach § 39 gelangen wir damit jedesmal wieder zum Anfangspunkte zurück. Sind in dieser Weise alle inneren Kräfte berücksichtigt, so bleiben noch die äußeren Kräfte aufzutragen, die ein Polygon bilden, das ebenfalls wieder zum Anfangspunkte zurückkehren muß, da nach dem Beweise das Schlußresultat Null sein muß. Es zeigt sich also, daß in der That alle äußeren Kräfte graphisch aneinander gereiht ein geschlossenes Polygon bilden, w. z. b. w.

108. Läßt sich zu mehreren Kräften, die an verschiedenen mat. P. desselben st. K. wirken, eine Resultierende angeben, so muß diese gleich der graphischen Summe jener Kräfte sein.

Man erkennt dies durch eine der vorigen nachgebildete, aber entsprechend erweiterte Überlegung. Die Kräftepolygone für die einzelnen mat. P. sind hier nämlich nicht geschlossen, sondern ergeben eine Resultierende, die für den mat. P. i mit R_i bezeichnet sein möge. R_i ist dann gleich der graphischen Summe von A_i und allen an i wirkenden inneren Kräften. Denkt man sich wieder alle Kräftepolygone aneinander gereiht und zwar so, daß jedesmal der Anfangspunkt des nächstfolgenden mit dem Endpunkte des vorausgehenden nicht geschlossenen Polygons zusammenfällt, so zeigt sich, daß die graphische Summe aller R gleich der graphischen Summe aller A und I, oder da letztere wieder, wie oben, sich gegenseitig aufheben, gleich der graphischen Summe aller A ist. Andererseits muß aber auch die Gesamtresultierende der äußeren Kräfte in jedem

mat. P. dieselbe Kraft R zu stande bringen, wenn sie die Kräfte A vollständig (hinsichtlich des äußeren Bewegungszustandes) ersetzen soll. Also muß sie gleichfalls gleich der graphischen Summe der R sein. Aus beiden Bedingungen ergiebt sich, daß die Gesamtresultierende auch gleich der graphischen Summe jener äußeren Kräfte sein muß.

109. Da es im allgemeinen nicht möglich ist, alle an einem st. K. wirkenden äußeren Kräfte durch eine Resultierende zu ersetzen, ersetzt man dieselben zuweilen durch eine ganze Gruppe neuer Kräfte, durch ein sogenanntes Kräftesystem, das man dem vorigen äquivalent nennt, wenn in Hinsicht auf den äußeren Bewegungszustand das eine dieselben Wirkungen hervorbringt wie das andere. Aus der Beweisführung in § 108 ergiebt sich sofort, daß zwei Kräftesysteme nur dann äquivalent sein können, wenn die graphische Summe aller Kräfte des einen Systems gleich der graphischen Summe aller Kräfte des anderen Systems ist.

110. Zweiter Hauptlehrsatz für Kräfte, die sich am st. K. Gleichgewicht halten. Projiziert man die Kräfte, welche sich an einem st. K. im Gleichgewichte halten, auf eine beliebige Ebene, so ist die graphische Summe der Projektionen gleich Null; projiziert man sie auf eine beliebige Gerade, so ist die algebraische Summe der Projektionen gleich Null.

Bew. wie in § 72.

111. Läßt sich zu mehreren Kräften, die an verschiedenen mat. P. desselben st. K. wirken, eine Resultierende angeben, so ist für jede beliebige Projektionsebene die Projektion der Resultierenden gleich der graphischen Summe und für jede beliebige Projektionsrichtung gleich der algebraischen Summe der Projektionen jener Kräfte in der betreffenden Ebene oder auf die betreffende Richtung.

Gleiches gilt auch für zwei äquivalente Kräftesysteme.

112. Dritter Hauptlehrsatz für Kräfte, die sich am st. K. Gleichgewicht halten. Projiziert man die Kräfte, welche sich an einem st. K. im Gleichgewichte halten, auf eine beliebige Projektionsebene, so ist für jeden beliebigen Punkt dieser Ebene als Momentenpunkt die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfteprojektionen gleich Null.

Anl. z. Bew. Nach § 82 gilt der Satz in der angegebenen Fassung für Kräfte, die sich an demselben mat. P. im Gleichgewichte halten. Wendet man dies auf jeden einzelnen mat. P. an, addiert sämtliche Momentengleichungen und berücksichtigt, daß jeder inneren Kraft $I_{i,k}$ (§ 107) eine in dieselbe Gerade fallende, entgegengesetzt gerichtete und gleich große Kraft $I_{k,i}$ gegenübersteht, so daß die Summe der Momente dieser beiden in jedem Falle zu Null wird, so bleiben in der Momentengleichung nur noch die Momente der Projektionen der äußeren Kräfte zurück, woraus der Satz folgt.

113. In gleicher Weise gelangt man zu den Sätzen:

a) Soll eine Kraft die Resultierende von mehreren an verschiedenen mat. P. desselben st. K. angreifenden Kräften sein, so muß für jede beliebige Projektionsebene und jeden in dieser beliebig gewählten Momentenpunkt das Moment der Projektion der Resultierenden gleich der algebraischen Summe der Momente der Projektionen dieser Kräfte sein.

b) Sollen zwei Kräftesysteme äquivalent sein, so muß für jede Projektionsebene und jeden in dieser gelegenen Momentenpunkt die Momentensumme der Kräfteprojektionen für beide Systeme denselben Wert besitzen.

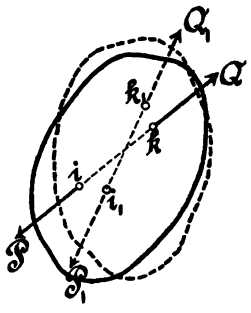
114. Die Übertragung des vierten Hauptlehrsatzes auf die Beurteilung des Verhaltens von Kräften, die am st. K. wirken, gelingt nicht in so einfacher Weise wie bei den drei ersten Sätzen. Vielmehr muß zu diesem Zwecke vorher der folgende Hilfslehrsatz aufgestellt und bewiesen werden.

Lehrsatz. *Wirken an zwei beliebigen mat. P. eines in Bewegung begriffenen st. K. zwei in die Richtung der Verbindungslinie fallende Kräfte von gleicher Größe, so ist, welches auch die Bewegung des Körpers sein mag, die Arbeit der einen Kraft ebenso groß als die Arbeit der anderen und beide Arbeiten haben dasselbe Vorzeichen, wenn die Kräfte gleich gerichtet waren, entgegengesetztes Vorzeichen im anderen Falle.*

Anl. z. Bew. Die Bewegung des Körpers aus einer Lage in eine benachbarte kann man sich zusammengesetzt denken aus einer

Translation, welche den Punkt i in die Lage i_1 (Fig. 14) bringt und eine Rotation um diesen Punkt, durch welche k in k_1 übergeführt wird. Bei jener Translation beschreiben alle Punkte des Körpers gleiche und gleichgerichtete Bahnen. Es ist daher sowohl der Weg des Angriffspunktes k gleich demjenigen des Punktes i, als auch die Projektionen beider Wege auf die gemeinsame Richtungslinie der Kräfte P und Q gleiche sind. Da nun ferner bei der darauf folgenden Rotation um den Punkt i_1 der Punkt k einen Weg beschreibt, der in jedem Augenblicke senkrecht steht auf der Verbindungslinie beider Angriffspunkte, also auch senkrecht auf der Richtungslinie von Q, so folgt, daß bei dieser Rotation keine Arbeit von den betrachteten Kräften geleistet wird (§ 85), woraus der Satz folgt.

Fig. 14.



Anm. Wäre der Körper nicht starr, so könnte sich die Entfernung der Punkte i und k ändern. In diesem Falle würden beide entgegengesetzt gerichtete Kräfte zusammen genommen eine Arbeit leisten. Solche Arbeit innerer Kräfte wird Formänderungsarbeit genannt.

115. Vierter Hauptlehrsatz für Kräfte, die sich am st. K. Gleichgewicht halten. Die algebraische Summe der Arbeiten aller äußeren Kräfte, die sich an einem st. K. im Gleichgewichte halten, ist bei jeder beliebigen Bewegung, welche der Körper ausführen mag, gleich Null.

Anm. Die in dem Satze vorkommenden Kräfte, welche sich im Gleichgewichte halten, brauchen nicht die einzigen zu sein, welche an dem Körper wirken. Auch kann die Bewegung, welche der Körper ausführt, vorher schon vorhanden gewesen sein (vgl. das Trägheitsgesetz). Selbstverständlich kann aber die im Satze erwähnte beliebige Bewegung des Körpers nicht durch die dort erwähnten Kräfte hervorgebracht sein, da diese ja im Gleichgewichte stehen sollten.

Anl. z. Bew. Sollen jene Kräfte im Gleichgewichte sein, so muß die durch sie hervorgebrachte Einwirkung in Bezug auf jeden mat. P. des Körpers zu Null werden. Wendet man daher die Bezeichnungen von § 107 an und versteht unter $I_{i,k}$ u. s. w. die inneren

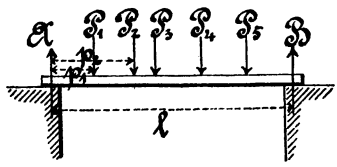
Kräfte, welche durch das von uns betrachtete Kräftesystem hervorgebracht werden, so ergiebt sich einmal ähnlich wie dort, daß für jeden mat. P. die algebraische Summe der Arbeiten aller an ihm angreifenden äußeren und inneren Kräfte gleich Null sein muß (§ 93) und dann, daß nach dem oben (§ 114) bewiesenen Lehrsatze die Summe der Arbeiten von $I_{i,k}$ und $I_{k,i}$ ebenfalls zu Null wird. Addiert man also alle sich nach § 93 ergebenden Arbeitsgleichungen, die für sämtliche mat. P. des Körpers sich aufstellen lassen und hebt die Arbeiten der inneren Kräfte gegen einander weg, so ergiebt sich, daß die algebraische Summe der Arbeiten aller äußeren Kräfte für sich genommen zu Null werden muß.

116. Ebenso ergiebt sich durch eine Überlegung, die im Vorigen bereits mehrfach angewendet wurde:

a) Die Arbeit der Resultierenden mehrerer Kräfte bei irgend einer Bewegung ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten jener Kräfte.

b) Für zwei äquivalente Kräftesysteme muß bei jeder beliebigen Bewegung des Körpers die algebraische Summe der Arbeiten von gleicher Größe sein.

Fig. 15.



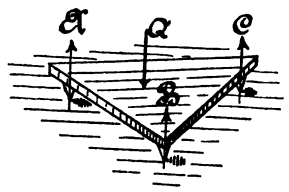
Aufg. 47. Ein Balken (Fig. 15), der an beiden Enden unterstützt ist, sei durch mehrere Gewichte $P_1 P_2$ u. s. w. belastet; man soll die Größe des Auflagerdrucks an beiden Trägerenden berechnen.

Anl. z. L. Der Druck an den Auflagerstellen verteilt sich über eine gewisse Strecke und zwar wie man annehmen darf gleichförmig. Die Resultierende aller Auflagerkräfte wird daher an jeder Auflagerstelle durch die Mitte derselben gerichtet anzunehmen sein. Um eine dieser Kräfte z. B. B zu berechnen, nehme man einen Punkt auf der Richtungslinie von A als Momentenpunkt an und schreibe die Gleichung an, welche ausspricht, daß die Momentensumme zu Null werden muß. Da alles andere gegeben ist, kommt hierin nur die eine Unbekannte B vor, die sich also daraus ergiebt.

Aufg. 48. Ein dreieckiges Brett (Fig. 16) sei an den drei Ecken unterstützt und irgendwo durch ein Gewicht Q belastet; man soll die an den Unterstützungsstellen hervorgebrachten Auflagerkräfte A, B, C berechnen.

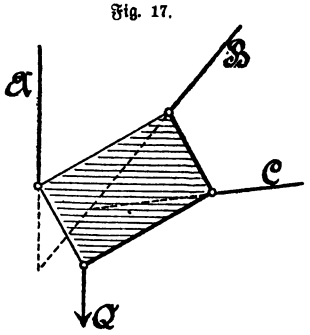
Anl. z. L. Man projiziere den Körper auf eine senkrechte Ebene von solcher Stellung, daß die Richtungslinien von A und B sich auf eine einzige Gerade projizieren. Legt man hierauf den Momentenpunkt auf diese Gerade, so enthält die Momentengleichung, welche sich anschreiben läßt, nur noch die Unbekannte C, die sich demnach hieraus bestimmen läßt. In ähnlicher Weise lassen sich alsdann auch die beiden anderen berechnen.

Fig. 16.



Aufg. 49. An einem Brette (Fig. 17), das an drei Seilen oder Stangen aufgehängt ist, deren Richtungslinien in einer Ebene liegen, aber nicht durch denselben Punkt hindurch gehen, sei die Last Q aufgehängt; man soll die hierdurch hervorgebrachte Anspannung der Seile berechnen.

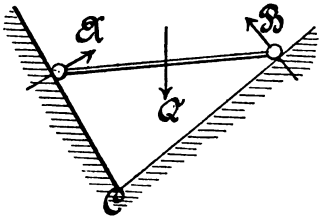
Fig. 17.



Anl. z. L. Man wähle den Schnittpunkt der Richtungslinien von A und B als Momentenpunkt und schreibe für ihn die Momentengleichung an, in der außer Q und den (gegebenen) Hebelarmen nur die Unbekannte C vorkommt. Die Seilspannungen A und B kann man alsdann entweder in gleicher Weise oder auch durch Konstruktion des Kräftepolygons bestimmen.

Aufg. 50. Eine Stange AB, an deren Enden Rollen befestigt sind, ruht auf den Schenkeln des Winkels ACB. Suche die Gleichgewichtslage der Stange, die in der Mitte das Gewicht Q trägt a) mit Hilfe des ersten und dritten, b) des vierten Hauptlehrsatzes.

Fig. 18.



Anl. z. L. a) Da die Richtungen der Auflagerkräfte A und B senkrecht zu den Winkelschenkeln stehen, läßt sich ein Kräftedreieck zeichnen, durch welches A und B bekannt werden. Hierauf schreibe man für Punkt A als Momentenpunkt die Momentengleichung an. In derselben kommt als einzige unbekannte Größe der Winkel BAC vor, der sich hiernach ermitteln läßt; damit ist auch die Lage der Stange bekannt.

b) Denkt man sich die Stange ein wenig aus der Gleichgewichtslage verschoben, so muß die Summe der hierbei geleisteten Arbeiten $= 0$ sein.

Da A und B keine Arbeit leisten (§ 85), so muß auch die Arbeit von $Q = 0$ sein, d. h. die Mitte der Stange kann sich hierbei nur in horizontaler Richtung verschieben. Konstruiert man also die Kurve, welche die Mitte der Stange beschreibt, während diese auf den Schenkeln des Winkels rollt und zieht an dieselbe eine horizontale Tangente, so muß der Aufhängungspunkt des Gewichtes in der Gleichgewichtslage mit dem gefundenen Berührungspunkte zusammenfallen. Ist ACB ein Rechter, so ist jene Kurve ein Viertelkreis.

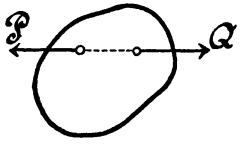
Zweites Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte an starren Körpern.

117. Nach § 105 lassen sich zwei an verschiedenen mat. P. eines st. K. wirkende Kräfte nur insofern durch eine Resultierende ersetzen, als diese hinsichtlich des Verhaltens des Körpers als Ganzes jenen gleichwertig ist; während dies unzulässig ist, wenn es sich um die Beurteilung der im Körper auftretenden inneren Kräfte handelt, wie bei den Aufgaben der Festigkeitslehre. Die jetzt folgenden Lehren dieses Kapitels gelten demnach nur unter jener ausdrücklichen Voraussetzung.

118. Lehrsatz. *Zwei Kräfte P und Q von gleicher Größe, welche an zwei mat. P. eines st. K. längs der Verbindungslinie dieser Punkte, aber in entgegengesetzter Richtung wirken, halten sich im Gleichgewicht, d. h. das äußere Verhalten des Körpers ist so, als wenn beide nicht vorhanden wären.*

Fig. 19.

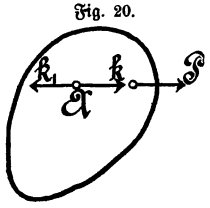


Anl. z. Bew. Die Einwirkung der Kräfte P und Q (Fig. 19) hat das Auftreten irgendwie verteilter innerer Kräfte zur Folge, welche den Zusammenhang des Körpers erhalten. An irgend einem mat. P. des Körpers denken wir uns alle an diesem durch P und Q hervorgerufenen inneren Kräfte zu einer Resultierenden I zusammengesetzt. Infolge dieser Resultierenden müßte sich der betreffende mat. P. in deren Richtung bewegen und I müßte daher eine positive

Arbeit leisten. Dies gilt von jedem mat. P. und es müßte daher die Summe der Arbeiten der Kräfte P und Q und aller von diesen herrührenden inneren Kräften einen positiven Wert besitzen. Nach § 114 ist aber die Summe der Arbeiten von P und Q sowohl als diejenige der inneren Kräfte $= 0$ und es muß daher überall $I = 0$ sein.

119. Lehrsatz. Der Angriffspunkt einer Kraft läßt sich beliebig längs deren Richtungslinie verlegen.

Fig. 20.



Anl. z. Bew. Auf der Richtungslinie von P (Fig. 20) wähle man einen Punkt A aus und bringe an demselben die Kräfte K und K_1 an, die beide gleich P sind, während K mit P gleichgerichtet, K_1 entgegengesetzt gerichtet ist. Da die Wirkungen von K und K_1 sich aufheben, ebenso aber auch die von K_1 und P (§ 118), so folgt der Satz.

120. Zwei Kräfte, deren Richtungslinien sich schneiden, lassen sich hiernach stets zu einer Resultierenden vereinigen. Man verlege zu diesem Zwecke deren Angriffspunkte nach dem Schnittpunkte und kann sie dann als Kräfte, die an demselben mat. P. wirken, nach den Lehren des ersten Abschnittes durch Konstruktion eines Kräftedreiecks zu einer Resultierenden zusammensetzen, deren Angriffspunkt wieder beliebig längs der gefundenen Richtungslinie verschoben werden darf. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man eine beliebige Zahl von Kräften zusammensetzen, so lange die Richtungslinie der bis dahin gefundenen Resultierenden eine der noch damit zu vereinigenden Kräfte schneidet.

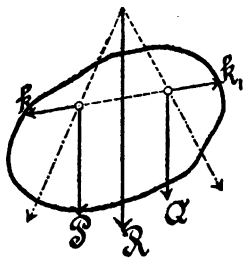
Aufg. 51. Die Richtungslinien von drei Kräften A, B, C bilden ein Dreieck von den Seiten a, b, c. Die Pfeile von A und B seien nach der Seite c, der Pfeil von C nach a hin gerichtet. Ermittle 1) die Größe und Richtungslinie der Resultierenden aller drei Kräfte, wenn $a = 5$, $b = 4$, $c = 3{,}5$ cm, $A = 80$, $B = 100$, $C = 140$ kgr; 2) berechne die Abschnitte, welche die Resultierende auf den Dreiecksseiten abschneidet (mit Hilfe des Momentensatzes).

Aufg. 52. Vier Kräfte, die alle in derselben Ebene liegen, und deren Größen und Richtungslinien gegeben sind, zu einer Resultierenden zusammenzusetzen wenn 1) die Richtungslinien ein beliebiges Viereck

bilden, 2) wenn zwei derselben zu einander parallel, 3) wenn drei zu einander parallel sind, die vierte aber sie schneidet.

121. Zwei parallele Kräfte P und Q (Fig. 21) lassen sich dadurch zusammensetzen, daß man längs einer Linie, welche die beiden Richtungslinien schneidet, zwei neue einander entgegengesetzt gleiche Kräfte K und K_1 einführt, hierauf K mit P und K_1 mit Q zusammensetzt und die beiden entstehenden Resultierenden mit einander zu R vereinigt.

Fig. 21.



Durch eine Wiederholung dieses Verfahrens lassen sich beliebig viele parallele Kräfte zusammensetzen; auch dann, wenn die Richtungslinien nicht alle in derselben Ebene liegen.

122. Von besonderer Wichtigkeit ist die Aufgabe, die Schwerkräfte, welche an den verschiedenen Teilen eines st. K. wirken, zu einer Resultierenden zu vereinigen. Diese Aufgabe kann nach dem vorstehenden stets gelöst werden.

Liegen die Gewichte, um deren Zusammensetzung es sich handelt, alle in einer vertikalen Ebene (wie dies bei vielen Anwendungen der Mechanik auf die Baukonstruktionslehre vorkommt), so genügt es, zwei neue und entgegengesetzt gleiche Kräfte K und K_1 einzuführen, die erste mit einem der Gewichte zusammenzusetzen, die gefundene Resultierende mit dem folgenden Gewichte u. s. w., bis alle Gewichte berücksichtigt sind, worauf die erhaltene Resultierende noch mit K' vereinigt wird, welche Operation die gesuchte Resultierende aller Gewichte liefert.

Den Linienzug der hierbei der Reihe nach auftretenden Resultierenden nennt man das **Seilpolygon** oder auch das Gelenkpolygon. Denkt man sich nämlich ein Seil mit den gegebenen Gewichten und in den vorgeschriebenen horizontalen Abständen belastet, so bleibt es in der durch die Konstruktion gefundenen Gestalt im Gleichgewichte. Beweise dies!

Aufg. 53. An einem starren Körper wirken senkrecht gerichtete Kräfte von 20, 50, 40, 35, 60 kgr. Die horizontalen Abstände der

folgenden von der ersten betragen 12, 20, 28, 40 cm. Ermittle die Resultierende a) durch Konstruktion des Seilpolygons, b) durch Anwendung des Momentensatzes.

123. Der einzige Fall, in welchem zwei parallele Kräfte nicht durch eine Resultierende ersetzt werden können ist der, daß sie beide gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, ohne daß sie in dieselbe Gerade fallen. Zwei solche Kräfte nennt man ein Kräftepaar.

Versucht man ein Kräftepaar nach der in § 121 angegebenen Methode zusammenzusetzen, so kommt man immer wieder auf ein neues Kräftepaar, das dem vorigen sonach äquivalent ist.

Lehrsatz z. Üb. Das statische Moment eines Kräftepaares (d. i. die algebraische Summe der Momente der beiden das Paar bildenden Kräfte) hat für jeden Punkt der Ebene des Paares als Momentenpunkt denselben Wert.

Lehrsatz z. Üb. Zwei Kräftepaare von gleichem Momente, welche in derselben Ebene liegen, sind sich stets äquivalent.

Lehrsatz z. Üb. Zwei Kräftepaare in derselben Ebene, deren Momente verschiedenes Vorzeichen haben und gleich groß sind, halten sich Gleichgewicht.

Lehrsatz z. Üb. Zwei Kräftepaare lassen sich stets zu einem resultierenden Paare zusammensetzen, dessen Moment gleich ist der Summe der Momente der Komponenten.

Lehrsatz z. Üb. Ein Kräftepaar und eine einzelne Kraft ergeben eine Resultierende, welche der letzteren gleich und ihr parallel gerichtet ist.

Aufg. 54. An einer Lokomotive wirken folgende äußere Kräfte: das Gewicht von 30 000 kgr, die von dem angehängten Zuge durch die Zugkette übertragene Kraft von 1500 kgr und die bei gleichförmiger Bewegung dieser gleiche Reibung zwischen den Treibrädern und Schienen; außerdem der aufwärts gerichtete Schienendruck. Setze die drei zuerst genannten Kräfte zu einer Resultierenden zusammen und bestimme, um wieviel cm das Gewicht während des Ganges der Maschine durch die Einwirkung des Kräftepaares Zugkraft und Reibung nach hinten verschoben erscheint, wenn die Höhe der Zugkette über der Schienenoberkante 90 cm beträgt.

Aufg. 55. Um wieviel erscheint der Schwerpunkt eines Magneten bei horizontaler Lage desselben verschoben, wenn die vertikale Komponente der an einem Pole wirkenden erdmagnetischen Kraft $\frac{1}{n}$ des Gewichtes, die Entfernung zwischen den Polen gleich l ist?

124. Zwei Kräfte, deren Richtungslinien windschief zu einander liegen, lassen sich niemals durch eine Resultierende ersetzen. Doch kann man sie nach der in § 125 auseinanderzusetzenden Methode

stets auf unendlich vielfache Art durch zwei andere zu einander windschiefe Kräfte ersetzen.

125. Lehrsatz. Beliebig viele und beliebig gerichtete Kräfte, welche an einem st. K. wirken, lassen sich stets auf unendlich mannigfaltige Art durch zwei zu einander windschiefe Kräfte ersetzen.

Anl. z. Bew. Man wähle eine beliebige Ebene und einen nicht in ihr liegenden Punkt aus. Von letzterem aus lege man durch jede der gegebenen Kräfte eine Ebene und zerlege in dieser Ebene die gegebene Kraft in eine Komponente, die längs der Schnittlinie dieser Ebene mit der gegebenen und in eine andere, die nach dem gewählten Punkte zu geht. Man erhält dadurch doppelt so viel Kräfte als zuerst, von denen die eine Hälfte durch den gewählten Punkt geht und sich zu einer einzigen vereinigen läßt, während die übrigen alle in einer Ebene liegen und sich ebenfalls zusammensetzen lassen. [Gelangt man hierbei in der Ebene zu einem Kräftepaare, so läßt sich dieses noch weiter mit der durch den gewählten Punkt gehenden Kraft zusammensetzen und die gegebenen Kräfte lassen sich durch eine einzige ersetzen.]

126. Lehrsatz. Drei Kräfte können sich an einem st. K. nur dann Gleichgewicht halten, wenn ihre Richtungslinien in derselben Ebene liegen und sich entweder in einem Punkte schneiden oder alle zu einander parallel sind.

Anl. z. Bew. Die erste Behauptung beweist man durch Projektion der Kräfte auf eine Ebene, die zu einer der Kräfte senkrecht steht und durch Aufstellen der Momentensumme für einen Punkt, der auf der Richtungslinie einer der Projektionen der beiden anderen Kräfte liegt. Es zeigt sich, daß für windschiefe Lage der Kräfte die Momentensumme nicht $= 0$ wird. Die zweite Behauptung ergiebt sich in gleicher Weise, indem man den Momentenpunkt auf den Schnittpunkt zweier Kräfte legt.

Im übrigen müssen die Kräfte, insofern sie wirklich Gleichgewicht halten sollen, dem ersten Hauptlehrsatze genügen, d. h. ihre graphische Summe muß $= 0$ sein.

Aufg. 56. Gegeben sind beliebig viele Kräfte, die alle in einer Ebene liegen, und drei gerade Linien, welche sich in drei Punkten

schneiden. Bestimme drei Kräfte, welche diese Linien zu Richtungslinien haben, so daß sie mit den gegebenen Gleichgewicht halten a) mit Hilfe des Momentensatzes, b) durch bloße Konstruktion nach dem ersten Hauptsatze.

Anm. ad b). Setze die gegebenen. Kräfte zu einer Resultierenden zusammen, deren Schnittpunkt mit einer der gesuchten Kräfte A sei, während sich die anderen beiden Linien in B schneiden, dann muß die Resultierende sowohl der beiden ersten als der beiden letzten die Linie AB einschlagen. Durch Konstruktion von zwei Kräftedreiecken ergeben sich hiernach alle gesuchten Kräfte.

Drittes Kapitel.

Mittelpunkt paralleler Kräfte.

127. Die einzelnen mat. P. eines st. K. seien Massenkräften ausgesetzt, die alle dieselbe im Raume feste Richtung besitzen, gleichgiltig welche Lage man dem Körper geben möge. Diese Voraussetzung trifft zu für jeden an der Erdoberfläche befindlichen Körper hinsichtlich der an ihm wirkenden Schwerkraft; ferner auch für jeden Magneten hinsichtlich der von der Erde auf ihn ausgeübten magnetischen Kräfte.

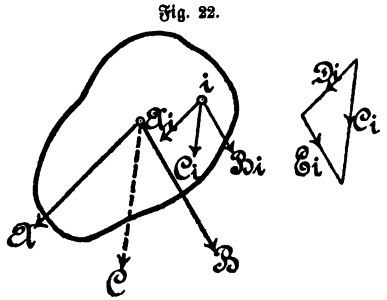
Für jede bestimmte Lage des Körpers kann man die an ihm wirkenden gleich gerichteten Massenkräfte durch eine Resultierende ersetzen (§ 122); handelt es sich um einen Magneten, so ist sowohl für die nordpolare als für die südpolare Hälfte eine solche zu bilden. Diese Resultierenden fallen der Reihe nach mit verschiedenen Geraden zusammen, die man innerhalb der Körpermaterie ziehen kann, wenn man den Körper in verschiedene Lagen bringt.

128. Lehrsatz. Die Resultierende aller parallelen Kräfte, welche an den mat. P. eines st. K. in fest bestimmter Richtung und stets gleichbleibender Größe wirken, gehen bei allen Lagen, welche man dem Körper geben mag, durch einen und denselben Punkt des Körpers oder des von diesem aus auszumessenden Raumes.

Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Insbesondere heißt er der Schwerpunkt, wenn die betreffenden Kräfte die Gewichte der mat. P. sind. In der Anwendung auf die an der einen Hälfte eines Magneten wirkenden magnetischen Kräfte heißt er der Pol (genauer der Fernpol) des Magneten.

Anl. z. Bew. Anstatt den Körper in verschiedenen Lagen zu zeichnen, können wir ihn in derselben Lage betrachten und den ganzen ihn umgebenden Raum gedreht denken. Den Körper und alle an ihm angreifenden Kräfte projiziere man auf eine Ebene. Seien ABC die Richtungen der Resultierenden für drei Lagen des Körpers gegen den ihn umgebenden Raum, ferner $A_iB_iC_i$ die am mat. P. i in den drei Fällen angreifenden Schwerkräfte. Dann ist n. V. $A_i = B_i = C_i$ und ferner $A_i \parallel A$; $B_i \parallel B$; $C_i \parallel C$ und nach dem Momentensatze

Fig. 22.



$$\Sigma A_i a_i = 0; \quad \Sigma B_i b_i = 0,$$

wenn man den Schnittpunkt O der Linien A und B als Momentenpunkt wählt, die Hebelarme mit a_i resp. b_i bezeichnet und die Summierung über alle mat. P. ausdehnt.

Die Kraft C_i läßt sich durch zwei andere Kräfte ersetzen, welche in die Richtungen von A_i und B_i fallen; bezeichnet man diese mit D_i und E_i, so ist $D_i = m.A_i$ und $E_i = n.B_i$, worin m und n Verhältniszahlen sind, die sich aus dem Kräftedreiecke $C_iD_iE_i$ entnehmen lassen. Führt man die Zerlegung an allen mat. P. aus, so erhält man stets dieselben Werte von m und n, weil alle Kräftedreiecke einander ähnlich sind. Nun ist nach dem Momentensatze

$$\Sigma C_i c_i = \Sigma D_i a_i + \Sigma E_i b_i = m\Sigma A_i a_i + n\Sigma B_i b_i = 0.$$

Hiernach muß auch das Moment der Resultierenden C gleich Null sein, diese letztere also ebenfalls durch den Punkt O gehen. Da dies für jede Richtung C und für die Projektion in jeder beliebigen Ebene gilt, muß in der That ein Punkt O existieren,

durch den alle Resultierenden bei beliebigen Lagen des Körpers hindurchgehen.

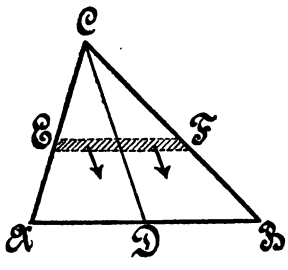
129. Die Resultierende aller Schwerkräfte, welche an einem st. K. wirken, heißt das Gewicht desselben; die Richtungslinie des Gewichtes für eine bestimmte Lage heißt eine Schwerlinie des Körpers. Nach dem oben bewiesenen Satze schneiden sich alle Schwerlinien in einem Punkte, dem Schwerpunkte. Dieser letztere kann daher stets gefunden werden, wenn man zwei Schwerlinien anzugeben vermag.

Durch das Experiment kann man eine Schwerlinie eines beliebigen st. K. in der Weise bestimmen, daß man ihn an einem Faden aufhängt. Die Fadenrichtung muß dann mit der Schwerlinie zusammenfallen.

130. Von den Schwerlinien und dem Schwerpunkte einer geometrischen Fläche oder Linie oder eines geometrischen Körpers redet man in dem Sinne, daß man sich die gegebene Linie oder Fläche oder den geometrischen Körper längs der ganzen Ausdehnung derselben gleichmäßig mit überall gleich schwerer Materie erfüllt und zu dieser hinzugedachten Materie den Schwerpunkt aufgesucht denkt.

131. Lehrsatz. Jede Mittellinie eines Dreiecks ist eine Schwerlinie, der Schnittpunkt der drei Mittellinien ist der Schwerpunkt desselben.

Fig. 23.



Anl. z. Bew. Ist $AD = DB$ (Fig. 23) und man zieht $EF \parallel AB$, so wird auch EF von der Mittellinie CD halbiert. Zieht man unmittelbar unter EF noch eine zweite zu AB parallele Linie, so umfaßt der links entstehende Streifen so viel mat. P. als der rechte. Zu jedem mat. P. des rechten Streifens vermag man dann einen des linken anzugeben, so daß beide von CD gleich weit entfernt sind. Bringt man nun die Richtung von CD in die senkrechte Lage und wählt irgend einen Punkt von CD als Momentenpunkt, so entspricht jedem positiven Momente von dem

Gewichte eines mat. P. der einen Seite ein gleich großes negatives von der anderen Seite. Da hiernach die Momentensumme für jeden Punkt von *CD* gleich Null wird, giebt *CD* die Richtungslinie der Resultierenden an.

132. Lehrsatz. Jede Symmetrieachse einer symmetrischen Figur ist eine Schwerlinie derselben. Beweis!

133. Lehrsatz. Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms ist der Schwerpunkt desselben. Beweis!

134. Verbindet man die Schwerpunkte von zwei Teilen, aus denen eine Figur (oder ein Körper) zusammengesetzt ist, durch eine Gerade, so erhält man eine Schwerlinie der ganzen Figur (oder des Körpers). Es ergiebt sich dies sofort, wenn man die Figur in solche Lage bringt, daß jene Verbindungslinie in die Richtung der Schwerkraft fällt.

Hiernach läßt sich der Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks dadurch ermitteln, daß man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunkte ermittelt und sie verbindet und nach Ziehen der anderen Diagonale dasselbe wiederholt. Der Schnittpunkt der beiden gefundenen Schwerlinien giebt den Schwerpunkt.

Aufg. 57. Ermittle den Schwerpunkt a) eines Fünfecks, b) eines Sechsecks, c) eines Winkeleisenprofils, d) eines T-Profils.

Anl. ad c) und d). Durch Zerlegen in Rechtecke.

Aufg. 58. Ein kleinerer Kreis vom Radius r wird von einem größeren vom Radius r_1 umschlossen; der Abstand der Mittelpunkte sei a. Um wieviel steht der Schwerpunkt der gebildeten ringförmigen Fläche von beiden Mittelpunkten ab? (Momentensatz!)

135. Den Schwerpunkt einer krummen Linie kann man dadurch ermitteln, daß man diese in eine Anzahl gleicher Teile zerlegt, welche genau genug als geradlinig betrachtet werden können, und die Gewichte dieser Teile nach § 122 zu einer Resultierenden vereinigt. Man findet hierdurch eine Schwerlinie und nach Wiederholung der Operation für eine andere Richtung eine zweite und als Schnittpunkt beider den Schwerpunkt.

In ähnlicher Weise kann man den Schwerpunkt einer beliebig umgrenzten ebenen Fläche durch Zerlegung derselben in schmale

Streifen (Lamellen) finden, welche sich genau genug als Trapeze ansehen lassen.

Aufg. 59. Den Schwerpunkt eines Halbkreisbogens zu finden.

Aufg. 60. Ermittle den Schwerpunkt der Fläche eines Halbkreises.

136. Guldinsche Regel. Das Volumen eines Raumes, welcher durch eine ebene Figur beschrieben wird, wenn diese sich längs irgend einer Leitlinie, zu der ihre Ebene fortwährend senkrecht steht, unverändert fortbewegt, ist gleich dem Produkte aus dem Flächeninhalte der Figur und dem Wege des Schwerpunktes derselben.

Anl. z. Bew. Man betrachte das zwischen zwei benachbarten Lagen der Figur eingeschlossene Volumen und ermittle die Schnittlinie der Anfangs- mit der Endebene. Das Volumen ist dann gleich $\Sigma \Delta f . z . \alpha$ zu setzen, wenn Δf einen kleinen Teil der Fläche, z den Abstand desselben von jener Schnittlinie und α die Bogenlänge für den Radius 1 und für den Winkel, welche Anfangs- und Endebene mit einander bilden, bedeutet. Ist aber s der Abstand des Schwerpunktes der Figur von jener Schnittlinie, so ist nach der Definition des Schwerpunktes und nach dem Momentensatze $s . \Sigma \Delta f = \Sigma z . f$. Hiernach kann für das betrachtete Volumen gesetzt werden $s . \alpha \Sigma \Delta f$, worin nun $s . \alpha$ den Weg des Schwerpunktes angiebt. — Da hiernach der Satz für jedes Elementarvolumen gilt, muß er auch für einen beliebigen Schwerpunktsweg giltig sein.

Aufg. 61. Ermittle das Volumen eines Ringes von kreisförmigem Querschnitte, wenn die beiden Radien gegeben sind.

137. Der Schwerpunkt einer Pyramide (oder eines Kegels) liegt auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche und in $\frac{1}{4}$ der Höhe über letzterer.

Die erste Behauptung ergiebt sich leicht, wenn man die Pyramide in zur Basis parallele Schichten zerlegt und § 134 anwendet. Die zweite Behauptung kann entweder durch Anwendung des Momentensatzes und höhere Rechnung (Integr.) oder dadurch erwiesen werden, daß man zunächst ein Tetraëder betrachtet, in dem sich auf Grund der ersten Behauptung des Satzes sofort vier Schwerlinien angeben lassen, woraus sich die Höhenlage des Schwerpunktes ergiebt. Hierauf läßt sich der Satz zunächst auf vierseitige, dann auf fünfseitige Pyramiden u. s. w. übertragen.

Dritter Abschnitt.
Die Maschinen.

Erstes Kapitel.
Kinematik der Maschinen.

138. Begriff der Maschine. Unter einer Maschine versteht man eine aus einer Anzahl von Körpern derart zusammengesetzte Vorrichtung, daß jene Körper vermöge der Art ihrer Verbindung und der auf sie wirkenden Kräfte nur ganz bestimmte Bewegungen ausführen können.

Jene Körper nennt man Maschinenteile. Unter den Maschinenteilen ist derjenige der wichtigste, welcher mit dem umgebenden Raume fest in Verbindung gebracht ist und daher während des Ganges der Maschine in Ruhe verbleibt; derselbe heißt das Maschinengestell.

Jeder Maschinenteil steht mit einigen anderen in Verbindung. Diese Verbindung kann nur darin bestehen, daß die beiden mit einander in Beziehung stehenden Glieder sich längs gewisser Teile ihrer Oberfläche berühren, oder mit einander, wie man sich ausdrückt, im Eingriff stehen.

Die Art der Verbindung zweier Maschinenteile hängt ab von der geometrischen Form und Lage derjenigen Oberflächenteile zu einander, welche mit einander in Berührung kommen.

139. Elementenpaare. Betrachtet man einen einzelnen Maschinenteil, so sind für diesen in erster Linie charakteristisch diejenigen besonders geformten Teile seiner Oberfläche, welche dazu bestimmt sind, den Eingriff mit anderen Teilen zu vermitteln. Die übrige Gestaltung des Körpers kommt weniger in Betracht. Von dem Materiale, aus welchem man den Maschinenteil fertigt, hat man zunächst zu verlangen, daß es im stande sei, während des Ganges der Maschine die richtige gegenseitige Lage der einzelnen charakteristischen Oberflächenteile zu verbürgen und zweitens, daß

es widerstandsfähig genug sei, um die gewaltsame oder allmähliche Änderung jener Oberflächenformen hintanzuhalten.

Ein Maschinenteil muß daher angesehen werden als ein Träger bestimmter Oberflächenformen, dem die Aufgabe zukommt, Gestalt und gegenseitige Lage dieser Oberflächenformen aufrecht zu erhalten.

Die charakteristischen Oberflächenteile des Maschinenteils nennt man (nach Reuleaux) die *Elemente* desselben. Da jedes Element die Bestimmung hat, mit einem Elemente eines anderen Maschinenteiles in Eingriff zu kommen, so treten die Elemente in der Maschine stets paarweise auf. Unter einem *Elementenpaare* versteht man den Verein derjenigen Elemente zweier Maschinenteile, welche bestimmt sind, mit einander in Eingriff zu kommen.

140. Der Begriff des Elementes bezw. Elementenpaares ist nach den gegebenen Erklärungen ein rein geometrischer. Will man durch eine Maschine eine bestimmte Bewegung eines etwa zu verarbeitenden Stoffes, des Werkstückes, erzielen, so hat man letzteres in Verbindung mit Maschinenteilen zu setzen und durch eine geeignete Wahl und Anordnung von Elementenpaaren dafür zu sorgen, daß die verlangte Bewegung zu stande kommt. Dieses ist die Aufgabe der *Maschinenkinematik*. Die Kinematik der Maschinen ist hiernach eine geometrische Wissenschaft, welche sich mit dem durch die Gruppierung und Auswahl der die Maschinenteile verbindenden Elementenpaare bedingten Zusammenhange der Maschine und den hierdurch erzielten Bewegungen befaßt.

Dagegen ist es die Aufgabe der *Maschinenkonstruktionslehre*, die Maschinenteile als Körper so zu gestalten, daß sie dem in § 139 angegebenen Zwecke derselben entsprechen. Die Grundlage der Maschinenkonstruktionslehre bildet die Lehre von den besonderen Eigenschaften der einzelnen Materialien und die Festigkeitslehre.

141. Niedere Elementenpaare. Die wichtigsten und häufigst angewendeten Elementenpaare sind die von Reuleaux als niedere oder *Umschlußpaare* bezeichneten. Wie es der Name sagt, umschließt hierbei das eine Element das andere vollständig. Der Maschinenteil, welchem das eine angehört, hat demnach an der betreffenden

Stelle die Gestalt eines Hohlkörpers, der andere die eines dazu passenden Vollkörpers.

Solcher niederen Paare sind drei möglich: das Schraubenpaar, das Prismenpaar und das Drehkörperpaar. Sind zwei Maschinenteile durch ein Umschlußpaar verbunden, so vermag im ersten Falle jeder mat. P. des einen Teiles relativ zum anderen nur eine Schraubenlinie als Bahn zu beschreiben, im zweiten Falle nur eine gerade Linie, im dritten nur einen Kreis.

Die beiden letztgenannten Paare können übrigens als Grenzfälle des erstgenannten aufgefaßt werden (Schrauben mit unendlich großer, resp. unendlich kleiner Ganghöhe).

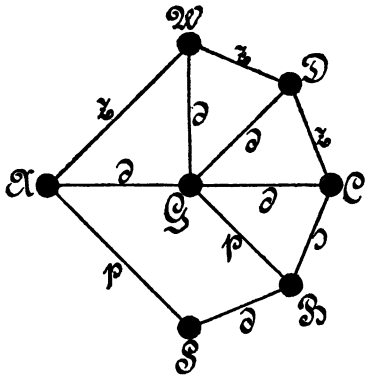
142. Sind zwei Maschinenteile mit dem Gestelle durch Umschlußpaare verbunden, so ist dadurch jedem mat. P. der beiden Teile eine bestimmte Bahn vorgeschrieben. Wollte man beide noch durch ein neues Umschlußpaar mit einander verbinden, so würde dadurch jede Bewegung unmöglich gemacht; die Teile wären starr verbunden. Um indessen die Bewegung des einen Teiles dem zeitlichen Verlaufe nach abhängig zu machen von derjenigen des anderen, ist noch ein weiteres Elementenpaar zwischen ihnen erforderlich, das aber nach dem oben Gesagten eine geringere Abhängigkeit der beiden Teile von einander bedingen muß, als ein Umschlußpaar. Man kann z. B. zu diesem Zwecke die beiden Teile längs gewisser (im allgemeinen krummer) Flächen sich berühren lassen, so daß hierdurch bei der Bewegung des einen Teiles der andere in genau vorgeschriebener Weise mit voran geschoben wird. Ein solches Elementenpaar heißt ein höheres. Zwei mit einander im Eingriff stehende Zahnräder bieten hierzu das bekannteste Beispiel. Doch gehören hierher auch alle sog. Kurvengetriebe, die Schraubenräder (höheres Schraubenpaar) u. a.

Aufg. 62. Zähle die bei einem gewöhnlichen Schraubstocke vorkommenden Maschinenteile auf und gieb die zu ihrer Verbindung dienenden Elementenpaare an.

Aufg. 63. Bei der Konstruktion einer gewöhnlichen Bohrmaschine mit selbstthätigem Vorschub besteht die Aufgabe, einem Körper (dem Bohrer) eine schraubenförmige Bewegung von sehr geringer Ganghöhe zu erteilen. Zwar ließe sich dies erreichen durch Verbindung der Bohrspindel mit dem Gestelle durch ein niederes Schraubenpaar.

Um indessen das Maß des Vorschubs für eine Umdrehung des Bohrers verschieden einstellen zu können, verbindet man die Bohrspindel gar nicht mit dem Gestelle, vielmehr mit zwei Körpern A und B, von denen A mit ihr durch Prismenpaar, B durch Drehkörperpaar verbunden ist; A ist mit dem Gestell durch Drehkörperpaar verbunden und vermittelt die Umdrehung der Spindel. B ist mit einem Körper C durch niederes Schraubenpaar und mit dem Gestelle durch Prismenpaar, C aber mit dem Gestelle durch Drehkörperpaar verbunden. Außerdem trägt C ein Zahnrad, durch das es in Umdrehung versetzt wird und so den Vorschub des Bohrers vermittelt. Fertige nach diesen Angaben eine Skizze der Bohrmaschine an und zeige, wie alles von einer Hauptwelle aus betrieben werden kann, wenn der kinematische Zusammenhang durch nebenstehendes Schema (Fig. 24) angegeben wird. Darin bedeutet W die Hauptwelle, D eine Zwischenwelle, G das Gestell, S die Bohrspindel; ferner bedeuten die zwischen den einzelnen Teilen gezogenen Striche Verbindungen durch Elementenpaare und zwar p Prismen-, d Drehkörper-, s Schrauben- und z Zahnräderpaar.

Fig. 24.



Aufg. 64. Fertige ein ähnliches Schema für den kinematischen Zusammenhang a) einer gewöhnlichen Drehbank, b) einer Bauwinde, c) den Kurbelmechanismus einer Dampfmaschine an.

143. Eine Maschine, welche in solcher Weise aufgebaut ist, daß der regelmäßige Zusammenhang der einzelnen Teile allein durch die vorkommenden Elementenpaare verbürgt ist, unabhängig von äußeren Kräften, heißt paarschlüssig oder auch zwangläufig. Wenn indessen bei einer Maschine äußere Kräfte mitwirken müssen, um den regelmäßigen Zusammenhang der Teile zu erhalten, heißt sie kraftschlüssig.

Läßt man z. B. bei einer horizontal gelagerten Welle die oberen Lagerschalen und den Lagerdeckel weg, so daß also von dem Elemente Hohldrehkörper nur die eine Hälfte an dem Gestelle wirklich zur Ausführung gelangt, so ist trotzdem die Welle durch ihr eigenes Gewicht davor geschützt, aus den Lagern gehoben zu werden, die Anordung ist aber dann eine kraftschlüssige. Die Geschichte des Maschinenbaues zeigt, daß mehr und mehr der Kraftschluß durch den reinen Paarschluß verdrängt wurde.

144. Als Maschinenteile kommen nicht nur solche Körper vor, welche man in diesem Zusammenhange als starre ansehen kann, sondern auch bildsame Körper, wie Seile, Riemen, Ketten, Flüssigkeitssäulen. Indessen lassen sich diese ohne Änderung in das beschriebene System einordnen, sobald man nur die Bedingungen beachtet, von denen die Formänderungen dieser Teile abhängen.

Zweites Kapitel.

Die mechanischen Potenzen.

145. Unter dieser Bezeichnung versteht man mehrere maschinelle Vorrichtungen sehr einfacher Art. Dieselben werden auch *einfache Maschinen* genannt. Früher glaubte man jede Maschine auf eine Kombination der mechanischen Potenzen zurückführen zu können. Obschon dies nicht zutrifft, ist es doch zweckmäßig, bei der Behandlung der Maschinen mit diesen einfachsten Formen derselben zu beginnen.

Gewöhnlich zählt man sechs verschiedene mechanische Potenzen auf: den Hebel, das Wellrad, die Rolle (mit der Unterabteilung feste und lose Rolle), die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube. Zur besseren Übersicht pflegt man sie in zwei Gruppen einzuteilen und zwar rechnet man die drei ersten zur Hebelgruppe, die letzten zur Gruppe der schiefen Ebene.

146. Unter einem *Hebel* versteht man einen st. K., der mit einem Gestelle so in Verbindung gebracht ist, daß er nur eine Drehung um eine feste Achse ausführen kann.

Die erwähnte Verbindung kann entweder in einem Drehkörperpaare zwischen Hebel und Gestell bestehen, also paarschlüssig sein oder es kann das Drehkörperpaar ersetzt sein durch eine unvollkommene Ausführung desselben, so zwar daß an Stelle des einen Umschlußkörpers nur eine einzige Kante tritt, auf welcher der Hebel aufliegt. Im letzteren Falle ist die Verbindung kraftschlüssig und der bewegliche Körper darf nur so lange als Hebel bezeichnet werden, als die Verbindung wirklich aufrecht erhalten wird.

147. Für das Wellrad gilt dieselbe Definition wie für den Hebel, so daß zwischen beiden kein wesentlicher Unterschied besteht. Vielmehr ist nur die verschiedene äußere, übrigens mannigfach wechselnde Form der Ausführung für die Wahl der einen oder anderen Bezeichnung maßgebend, ohne daß sich eine feste Grenze angeben ließe. Gewöhnlich (wenn auch nicht in allen vorkommenden Fällen) gebraucht man die Bezeichnung Hebel, wenn alle an ihm wirkenden Kräfte als in einer zur Drehachse senkrechten Ebene liegend angesehen werden dürfen; andernfalls, und namentlich wenn der Körper eine bedeutende Ausdehnung in der Richtung der Drehachse besitzt, nennt man ihn Wellrad. Das Wellrad wird übrigens in den meisten Fällen mit Paarschluß ausgeführt.

148. Projiziert man einen Hebel oder ein Wellrad auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene, so muß für die Kräfteprojektionen in dieser Ebene der Momentensatz gelten (§ 112). Als Momentenpunkt wählt man den Punkt, in welchem sich die Drehachse projiziert, welcher als Drehpunkt (auch Unterstützungspunkt, fester Punkt) bezeichnet wird. Es hat dies den Vorteil, daß in der Momentengleichung die durch jenen Punkt gehende Auflagerkraft zwischen dem Hebel (Wellrad) und dem Gestell nicht vorkommt.

Übt man direkt nur auf zwei mat. P. eines Hebels äußere Kräfte aus, so kommen in jener Momentengleichung für den Gleichgewichtsfall nur zwei Glieder vor; sie läßt sich schreiben $Pp - Qq = 0$ oder auch $Pp = Qq$. An Stelle dessen läßt sich auch die Proportion setzen

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

Diese Proportion oder die das gleiche aussagende Momentengleichung wird speziell das Hebelgesetz genannt. Dasselbe gehört zu den bekanntesten Sätzen der Mechanik und war bereits den Alten (Archimedes) geläufig.

149. Hinsichtlich der äußeren Gestalt des Hebels und der Art, wie die beiden Kräfte auf ihn wirken, ist die Einteilung einarmiger, zweiarmiger und Winkelhebel in Gebrauch. Wirken nur zwei parallele äußere Kräfte direkt auf den Hebel ein, so heißt dieser ein einarmiger, wenn die Richtungslinien beider Kräfte auf

derselben Seite des Drehpunktes liegen, im entgegengesetzten Falle ein zweiarmiger; ein Winkelhebel aber dann, wenn die Kräfte nicht parallel gerichtet sind. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß auch die äußeren Umrisse des Hebels dem entsprechend verlaufen.

Diese und viele andere bei der Behandlung der mechanischen Potenzen vorkommenden unsicheren und schwankenden Unterscheidungen, welche aus früherer Zeit, in der die Mechanik noch wenig entwickelt war, zurückgeblieben sind, können aber nur als unwesentlich bezeichnet werden.

150. Bei genauerer Betrachtung des Gleichgewichtes der Kräfte am Hebel darf die Reibung zwischen diesem und dem Gestelle nicht unberücksichtigt bleiben.

Bei der Verschiebung eines Körpers längs der Berührungsfläche desselben mit einem anderen tritt ein Widerstand, also eine Kraft auf, welche in dem Eingreifen der Unebenheiten beider Körperoberflächen in einander begründet ist. Diese Kraft, welche man gleitende Reibung nennt und welche sich dem relativen Gleiten beider Körper längs ihrer Berührungsflächen widersetzt, greift hiernach an den mat. P. der Körperoberfläche an und fällt der Richtung nach in die gemeinsame Berührungsfläche bezw. in die Tangentialebene derselben.

151. Da die Reibung ein Widerstand gegen relatives Gleiten beider Körperoberflächen ist, kann sie nicht auftreten, wenn eine Tendenz zu diesem Gleiten durch das Auftreten anderer Kräfte nicht gegeben ist. Sie wird daher immer nur in solcher Größe sich ausbilden, als es die Verhinderung dieses Gleitens erfordert. Dabei kann sie aber einen bestimmten größten Betrag in jedem gegebenen Falle nicht überschreiten, der übrigens immer dann zur Geltung gelangt, wenn das Gleiten thatsächlich eintritt. Gewöhnlich versteht man unter Größe der Reibung den Wert dieses beim wirklichen Gleiten eintretenden größtmöglichen Betrages derselben.

Überall dort, wo die Reibung als bewegende Kraft auftritt (wie bei den Reibungsrädern), ist es nötig, sich des hier Gesagten zu erinnern.

152. Die in vorigem § definierte Größe der Reibung ist abhängig von der Beschaffenheit der sich berührenden Oberflächen und der Größe des zwischen ihnen wirkenden Druckes. Beides

ergiebt sich aus dem in § 150 über die Ursache der Reibung Gesagten. Insbesondere ist klar, daß die Reibung abhängig davon sein muß, wie stark die Rauhigkeiten der Oberflächen in einander gepreßt werden, d. h. von dem wirkenden Drucke.

Dagegen ist es ziemlich gleichgiltig, wie groß die Oberflächenteile sind, welche sich berühren, so lange der gesamte zwischen ihnen übertragene Normaldruck dieselbe Größe behält. Es folgt dies daraus, daß bei größerer Berührungsfläche der Normaldruck sich auch über eine größere Fläche verteilt, so daß jeder Quadratcentimeter weniger Druck empfängt und daher sich weniger in die Unebenheiten des anderen Körpers einpreßt.

Von einigem Einflusse ist die Geschwindigkeit, mit welcher der eine Körper längs des anderen hingleitet, so zwar daß bei größerer Geschwindigkeit die Größe der Reibung etwas geringer ausfällt. Es kommt dies daher, daß für das völlige Eingreifen der beiderseitigen Unebenheiten eine gewisse Zeit erforderlich ist, so daß bei großer Geschwindigkeit dieser Eingriff nicht vollständig zu stande kommt.

Aus diesem Grunde ist auch die Reibung der Ruhe, welche sich bei vorheriger relativer Ruhe dem Beginne des Gleitens widersetzt, etwas größer, als die während der relativen Bewegung auftretende.

153. Gewöhnlich sieht man aber bei Beurteilung der Größe der Reibung von der Berücksichtigung dieser weniger wesentlichen Umstände ab und nimmt an, daß die Reibung ausschließlich von der Art und Beschaffenheit der Oberflächen und dem zwischen diesen wirkenden gesamten Normaldrucke abhängt. Die Zahl, mit welcher man je nach Art der Oberflächen diesen Normaldruck multiplizieren muß, um die Größe der Reibung zu erhalten, nennt man den Reibungscoeffizienten, welcher gewöhnlich mit f (Anfangsbuchstabe von Friktion = Reibung) bezeichnet wird. Hiernach ist zu setzen

$$F = f.N,$$

wenn N den Normaldruck und F die Reibung angiebt.

154. Wesentlich komplizierter als bei der gleitenden Reibung sind die Vorgänge, welche das Auftreten der sogenannten rollenden

Reibung zur Folge haben. Wenn ein Cylinder oder eine Kugel über die horizontale Oberfläche eines Körpers hinwegrollt, greifen zunächst die Unebenheiten beider Oberflächen in derselben Weise in einander wie oben beschrieben; beim Fortrollen heben sie sich aber auch in derselben zu den Oberflächen senkrechten Richtung wieder von einander ab, was nur mit geringem Widerstande verknüpft ist. Außerdem entsteht noch dadurch ein Bewegungswiderstand, daß sich unter dem Drucke der Rolle die Oberfläche des stützenden Körpers etwas einsenkt, so daß beim Weiterrollen fortwährend eine Hebung um den Betrag der vorausgehenden Einsenkung bewirkt werden muß. Bei der Fortbewegung eines Fuhrwerks auf schlechtem Wege bildet der letztgenannte Umstand das wesentlichste Bewegungshindernis.

Schließlich wird häufig auch noch der aus der Zapfenreibung (des Rades) herrührende Widerstand in den Betrag der rollenden Reibung mit aufgenommen.

Da aber alle diese neben einander thätigen Ursachen der sogenannten rollenden Reibung in ihrer Größe von dem wirkenden Normaldrucke in derselben Weise abhängen, ist es zulässig, die Gesamtwirkung zusammenzufassen und wie bei der gleitenden Reibung zu setzen $F = f.N$, wobei nun f, der Coeffizient der rollenden Reibung, aus besonderen Versuchen zu bestimmen ist.

In den gewöhnlich vorliegenden Fällen ist der Coeffizient der rollenden ganz erheblich kleiner als derjenige der gleitenden Reibung. Vielfach sucht man daher die gleitende Reibung durch die rollende zu ersetzen, wie dies durch Zwischenlegen von Kugeln oder Rollen zwischen die sich über einander fortbewegenden Flächen erreicht werden kann.

Aufg. 65. Die Räder eines Eisenbahnwagens von 12 000 kgr Gewicht seien so stark gebremst, daß sie sich gar nicht mehr umdrehen; wie groß ist die an der Berührungsstelle zwischen Rädern und Schienen auftretende verzögernde Kraft (die Reibung), wenn der Reibungscoeffizient $= 1/7$ ist?

Aufg. 66. Zum Fortbewegen eines Lastwagens von 3000 kgr auf einer guten Landstraße müssen die Pferde vermittelst der Zugstränge die durch ein Dynamometer gemessene horizontal gerichtete Kraft von 80 kgr ausüben; wie groß ist der Coeffizient der rollenden Reibung?

Aufg. 67. Der Schieber einer Dampfmaschinensteuerung hat eine Oberfläche von 120 qcm; der Dampf hat einen Überdruck von 4 kgr pro qcm; der Reibungscoeffizient = 0,15; wie groß ist die durch die Excenterstange zu übertragende Kraft?

155. Betrachtet man einen Hebel oder ein Wellrad, welches mit Hilfe cylindrischer Zapfen in horizontaler Lage mit dem Gestelle verbunden ist, so ergiebt sich, daß an jedem Teilchen der cylindrischen Berührungsfläche zunächst ein Normaldruck und infolge dessen eine gleitende Reibung aufzutreten vermag. Legt man wieder wie in § 148 den Momentenpunkt auf den Drehpunkt, so haben alle jene Normalkräfte das Moment 0, die Reibungen dagegen ergeben ein Moment, das gleich $F.r$ gesetzt werden kann, wenn F die Summe aller Reibungen, r aber den Zapfenradius bedeutet.

Wirken insbesondere nur zwei drehende Kräfte P und Q auf den Hebel, so heißt die Gleichgewichtsbedingung nunmehr

$$Pp - Qq \pm Fr = 0.$$

Der Höchstbetrag von F, welcher in diese Gleichung einzusetzen ist, wenn thatsächlich eine Bewegung ausgeführt wird, kann genau genug $= (P + Q)f$ beim zweiarmigen und gleich $(P - Q)f$ beim einarmigen Hebel gesetzt werden.

156. Auf die Bewegung des Hebels oder Wellrades hat die Reibung nur verhältnismäßig geringfügigen Einfluß, wenn man den Zapfenradius verhältnismäßig klein machen kann. Der letztere ist stets so klein zu wählen, als es die Festigkeit des Materials erlaubt.

Bei einem auf einer Schneide aufgelagerten Hebel ist nur eine äußerst geringfügige rollende Reibung zu überwinden. Solche Hebel eignen sich daher besonders zur Konstruktion der Gewichtswagen.

Aufg. 68. An einem Hebel wirken drei parallele Kräfte, von denen zwei in der Größe von 80 und 150 kgr eine Drehung im einen Sinne hervorzurufen suchen und die Hebelarme von 70 und 40 cm besitzen, während der Hebelarm der dritten 50 cm beträgt. Der Zapfenradius sei gleich 0,8 cm, der Reibungscoeffizient 0,07 (gute Schmierung vorausgesetzt). Wie groß muß die dritte Kraft sein a) wenn keine Zapfenreibung zu stande kommen soll, b) wenn mit Zuhilfenahme der Reibung gerade Gleichgewicht und c) wenn eine Bewegung im Sinne dieser Kraft zu stande kommen soll?

157. Die feste Rolle unterscheidet sich von Hebel und Wellrad nur durch ihre besondere Gestalt und die Art, wie an ihr durch ein über einen Teil des Umfangs geschlungenes Seil die Kräfte P und Q angebracht werden. Ist die Rolle zentrisch, d. h. der Drehpunkt zugleich Mittelpunkt des den Umriß bildenden Kreises, so müssen die beiden Seilspannungen P und Q einander gleich sein, insofern das Seil absolut biegsam ist und die Zapfenreibung vernachlässigt werden kann. Letztere kann übrigens in derselben Weise berücksichtigt werden, wie es bei Behandlung des Hebels gezeigt wurde. Bei excentrischen Rollen, die aber nur selten angewendet werden, ist die allgemeine Momentengleichung zu Rate zu ziehen.

158. Das mit der festen Rolle in Eingriff stehende Seil ist in drei Stücke zerlegt zu denken. Das mittlere Stück, welches sich im nächsten Augenblicke mit dem Umfange der Rolle fortbewegt, ist als Bestandteil dieses Maschinengliedes zu betrachten. Die beiden anderen Seilstücke, welche durch die Kräfte P und Q gespannt sind, stehen durch dieses Mittelglied mit der Rolle in Verbindung. Ein bestimmter Teil des Seiles vermag während des Fortganges der Bewegung der Reihe nach den drei genannten Maschinengliedern anzugehören. Dieser Wechsel ist dadurch ermöglicht, daß das Seil ein bildsames Maschinenglied ist.

159. Die Seilspannung verteilt sich über den ganzen Querschnitt des Seiles und kann durch eine Resultierende ersetzt werden, welche mit der Mittellinie des Seiles zusammenfällt; diese wird kurzweg Seilspannung genannt. Als Hebelarm der Seilspannung ist hiernach der Rollenhalbmesser vermehrt um die halbe Seildicke anzusehen.

160. Die Steifigkeit des Seiles bewirkt indessen eine Änderung dieser Hebelarme. Da das Seil seiner Krümmung einen Widerstand (halb elastischer halb zäher Art) entgegensetzt, vermag es nicht plötzlich aus der geraden in die gekrümmte Form überzugehen. Vielmehr nimmt es diese Krümmung erst allmählich an und spreizt sich daher von dem Rollenumfange ab, so daß die Richtung der geraden Seilstrecke keine Tangente mehr an dem Rollenumfange bildet. Hiermit ist eine Vergrößerung des bezüglichen Hebelarmes bedingt. In dem gekrümmten Übergangsstücke sind überdies die

Spannungen nicht mehr gleichförmig verteilt, sondern die Resultierende liegt mehr nach außen hin.

Wäre die Steifigkeit rein elastischer Natur, so müßte dieses Abspringen beiderseits in gleichem Maße erfolgen, die Hebelarme von P und Q müßten sich also gleich viel vergrößern und diese selbst nach wie vor gleich bleiben. Das findet auch statt, so lange keine Bewegung nach einer Seite hin erfolgt. Sobald sich die Rolle zu drehen anfängt, spreizt sich aber das auflaufende Seilstück stärker ab als das ablaufende, welches letztere wegen der Zähigkeit des Materials den gekrümmten Zustand beizubehalten suchte, wenn nicht die zugleich wirkende Elastizität eine Rückkehr in den geraden Zustand anstrebte.

Um den ungünstigen Einfluß der Seilsteifigkeit, welcher wegen des kleineren Hebelarmes der treibenden Kraft eine größere Stärke dieser letzteren bedingt, gering zu machen, muß man den Rollenhalbmesser möglichst groß, den Seildurchmesser möglichst klein und das Seilmaterial möglichst biegsam wählen.

161. Die lose Rolle unterscheidet sich von der festen dadurch, daß ein anderes Maschinenglied zum Gestelle wird. Als solches ist hier das von den beiden äußeren Seilstücken während des Ganges der Maschine ruhende anzusehen. Wenn auch während dieses Ganges Teile des als Gestell bezeichneten Seilstückes zuerst in das als zeitweiliger Bestandteil der Rolle anzusehende Mittelstück und dann in das treibende Seilstück übergehen, so steht dies doch der bezeichneten Auffassung wegen der Bildsamkeit des Seiles nicht im Wege (vgl. § 158).

Derjenige Teil, welcher bei der festen Rolle als Gestell dient und mit der Rolle durch ein Drehkörperpaar verbunden ist, verliert bei der losen Rolle diese Bedeutung und wird gewöhnlich als Haken ausgebildet, an dem irgend eine Last hängt.

162. Auch für die lose Rolle findet man zunächst durch Anwendung des Momentensatzes für den Rollenmittelpunkt, daß die beiden Seilspannungen einander gleich sein müssen, wenn von Zapfenreibung und Seilsteifigkeit abgesehen wird. Hier wünscht man aber in erster Linie zu wissen, welche Beziehung zwischen der Seilspannung und der an dem Haken hängenden Last besteht.

Bei paralleler Richtung der Seile muß nach dem zweiten Hauptlehrsatze die Summe beider Seilspannungen gleich der am Haken angreifenden Kraft, eine daher gleich der Hälfte dieser Kraft sein.

163. Sind dagegen die drei Kräfte nicht parallel, so lehrt der erste Hauptlehrsatz, daß sie graphisch aneinander gereiht ein Dreieck bilden müssen, das wegen der Gleichheit beider Seilspannungen ein gleichschenkliges sein muß.

Daraus folgt zunächst, daß die Seilrichtungen für den Gleichgewichtsfall mit der Richtung der Last gleiche Winkel bilden. Zieht man ferner in dem gleichschenkligen Kräftedreiecke das Höhenperpendikel, so ist das eine der beiden entstehenden kongruenten Dreiecke ähnlich dem Dreiecke, welches den Rollenradius zur Hypotenuse und die Hälfte der Sehne, welche die Ablauf- mit der Auflaufstelle des Seiles verbindet, zu einer Kathete hat. Hiernach besteht die Proportion

$$\frac{P}{L} = \frac{r}{s},$$

worin r den Rollenradius, s jene Sehne, P die Seilspannung und L die am Haken hängende Last bedeutet.

Dieselbe Proportion gilt übrigens auch für die feste Rolle, wenn für diese mit L die Auflagerkraft bezeichnet wird. Indessen ist die Größe der auf das Gestell übergehenden Auflagerkräfte nur insofern von Interesse, als es sich um eine genügend widerstandsfähige Konstruktion des Gestelles, oder um die Feststellung der auftretenden Zapfenreibung handelt.

Aufg. 69. Ein Seil sei der Reihe nach um fünf (feste oder lose) Rollen geschlungen. Wegen des Einflusses der Zapfenreibung und der Seilsteifigkeit sei jedesmal die Spannung des auflaufenden Seilstückes $= 0{,}9$ derjenigen des ablaufenden; wie groß ist die Spannung, welche man im letzten Seilstücke hervorrufen kann, wenn am Anfange eine Kraft von 800 kgr angebracht wird?

Aufg. 70. Unter welchen Umständen ist bei der losen Rolle die Last gleich der Seilspannung?

Aufg. 71. Welche Beziehung besteht zwischen Seilspannung und Last bei der losen Rolle, wenn der vom Seile umspannte Bogen einem Centriwinkel von 30^0 entspricht?

164. Die schiefe Ebene verdient kaum den Namen einer einfachen Maschine. Will man die Bezeichnung aber doch beibe-

halten, so ist die schiefe Ebene ein Maschinengestell, längs dessen sich ein Maschinenglied verschieben kann. Die Verbindung zwischen diesem und dem Gestell erfolgt entweder paarschlüssig durch Prismenpaar oder kraftschlüssig durch teilweise Ausführung desselben. Zur Verringerung des Reibungswiderstandes sind gewöhnlich Rollen (Wagenräder) zwischen beide Körper eingeschaltet.

Es genügt, wenn wir die Beförderung eines Wagens auf einer geneigten Straße ins Auge fassen.

165. An dem bergauf fahrenden Wagen wirken folgende Kräfte: die Zugkraft, welche parallel zur schiefen Ebene gerichtet sein möge, das Gewicht des Wagens, der Normaldruck zwischen Wagen und schiefer Ebene und die Reibung. Nehmen wir zunächst an, daß letztere klein genug sei, um sie unberücksichtigt lassen zu können, so muß für den Gleichgewichtsfall die graphische Summe der drei zuerst genannten Kräfte $= 0$ sein.

Zieht man durch den tiefsten Punkt der schiefen Ebene eine horizontale, durch den höchsten eine vertikale Linie, so entsteht ein Dreieck, welches dem Kräftedreieck ähnlich ist. Daher besteht die Proportion

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{l},$$

wenn $\frac{h}{l}$ das Verhältnis zwischen Höhe und Länge der schiefen Ebene (wofür man bei nicht zu steilen Straßen auch das sog. Steigungsverhältnis setzen kann), P aber die Zugkraft und Q das Gewicht des Wagens bedeutet.

166. Ist die Reibung mit zu berücksichtigen, so geht das Kräftedreieck in ein Trapez über, aus dem aber durch Abtrennung eines Rechtecks das frühere Dreieck wieder erhalten werden kann. Daraus folgt, daß man den aus obiger Proportion sich ergebenden Wert von P einfach um den Betrag der Reibung zu vermehren hat.

Aufg. 72. Welche Zugkraft muß an einem Wagen von 3000 kgr wirken, der eine Straße von 5% Steigung hinauf fahren soll a) ohne Reibung, b) mit Reibung, wenn der Reibungscoeffizient gleich $^1/_{50}$ für eine gute Landstraße gesetzt werden kann?

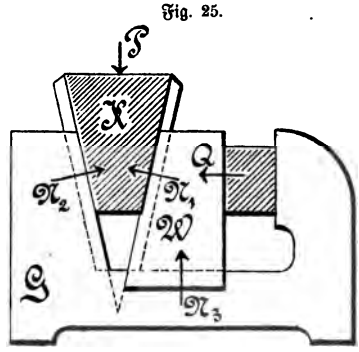
Aufg. 73. Wie ändert sich die oben angegebene Proportion, wenn die Zugkraft nicht parallel zur schiefen Ebene, sondern a) horizontal, b) unter irgend einem Winkel gerichtet ist?

Aufg. 74. Leite die allgemeine Formel für P unter Berücksichtigung der Reibung (Reibungscoeffizient $= f$) ab.

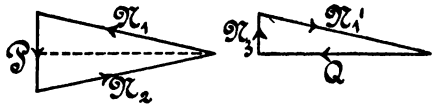
Aufg. 75. Wenn angenommen wird, daß die Zugtiere für kurze Zeit die vierfache Zugkraft von der gewöhnlich von ihnen verlangten ausüben können, welche Werte darf das Steigungsverhältnis einer Straße nicht überschreiten, wenn der Reibungscoeffizient a) 0,01, b) 0,03, c) 0,15, d) gleich f ist?

167. Die fünfte mechanische Potenz ist der **Keil**. Man versteht darunter einen prismatischen Körper von dreieckigem oder trapezförmigem Querschnitte, der mit zwei anderen Körpern G und W (Fig. 25), dem Gestelle und dem Widerlagsstücke zusammen die Keilvorrichtung bildet. Diese drei Körper sind unter einander durch drei Prismenpaare (Führungen) verbunden.

Fig. 25.



Sieht man zunächst von den Reibungen ab, so wirken am Keile drei Kräfte P und die Normalkräfte N_1 und N_2. Zeichnet man das Kräftedreieck, so wird dieses dem Keildreiecke ähnlich (weil die Seiten senkrecht auf einander stehen) und es verhält sich daher die auf den Rücken wirkende Kraft zu dem Normaldrucke, wie der Rücken zur betr. Keilseite (letztere gerechnet bis zum Schnittpunkte der wenn nötig verlängerten Seiten).



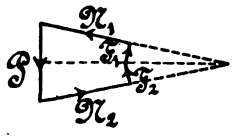
168. Soll dagegen der Druck Q ermittelt werden, mit dem ein Körper gepreßt wird, der zwischen die Hinterfläche des Widerlagsstücks und einen Fortsatz des Gestells geklemmt ist, so muß noch ein Kräftedreieck für die am Widerlagsstücke wirkenden Kräfte gezeichnet werden. Diese sind N_1' (die Reaktion von N_1), Q und N_3. Man erhält ein zu diesem Dreiecke kongruentes, wenn man in dem ersten Kräftedreiecke das Höhenperpendikel zur Seite P zieht.

Daraus folgt weiter, daß sich die vom Widerlagsstück ausgeübte Kraft Q zu P verhält wie die Höhe des Keils (von der Spitze aus gemessen) zum Rücken.

Durch einen Keil können demnach um so größere Wirkungen ausgeübt werden, je kleiner der Rücken im Vergleiche zu den Seiten oder zur Höhe ist, d. h. je kleiner der Winkel der beiden Keilseiten ist.

169. Die Reibung hat aber auf das Verhältnis der Kräfte am Keile einen sehr bedeutenden Einfluß. Infolge der Normalkräfte N_1 und N_2 treten Reibungen von der Größe fN_1 bezw. fN_2 auf und an Stelle des Kräftedreiecks tritt ein Kräftefünfeck (Fig. 26). Dasselbe geht aus jenem dadurch hervor, daß die Spitze abgebrochen wird und es ergiebt sich daraus für einen Keil von kleinem Keilwinkel, für den sonst der Normaldruck sehr hohe Werte erlangen könnte, eine sehr beträchtliche Verminderung dieses letzteren selbst durch vergleichsweise geringwertige Reibungen.

Fig. 26.



Bezeichnet man den jetzt wirklich zu stande kommenden Normaldruck mit N_1, denjenigen, welcher dem reibungsfrei beweglichen Keile entsprechen würde mit (N_1), so wird (für den gleichschenkligen Keil)

$$\frac{(N_1) - N_1}{F_1} = \frac{(Q)}{\frac{1}{2}P}.$$

Setzt man in diese Gleichung $(N_1) = P\frac{s}{r}$ (§ 167), $(Q) = P\frac{h}{r}$ (§ 168), wo s, h, r Seite, Höhe und Rücken bedeuten, ferner $F_1 = f.N_1$, so läßt sie sich nach der Unbekannten N_1 auflösen. Man erhält

$$N_1 = P \cdot \frac{s}{r + 2hf}.$$

Die Reibung hat also denselben Einfluß, als wenn der Rücken um die Größe $2hf$ verbreitert wäre.

Aufg. 76. Zeichne das Kräftefünfeck für den Keil unter der Annahme, daß N_1 die treibende, P die überwundene Kraft ist.

Aufg. 77. Unter welchen Umständen giebt der Keil a) 50%, b) 25% Nutzeffekt?

Aufg. 78. Ermittele die Formel, welche den Zusammenhang zwischen P und Q angiebt unter Berücksichtigung der Reibungen.

170. Wenn $2hf \geq r$ wird, vermag die Kraft N_1 den Keil nicht herauszutreiben, wenn auch gar keine Kraft auf den Rücken wirkt. Ein solcher Keil heißt selbstsperrend (vgl. Aufg. 76). Der Nutzeffekt desselben ist höchstens 50%. Beweis!

Selbstsperrende Vorrichtungen eignen sich besonders zu Befestigungszwecken. Auch der Keil wird im Maschinenbau vorwiegend als Befestigungsmittel verwendet, gewöhnlich in Verbindung mit einer Befestigungsschraube (so bei den Lagern von Schwungradwellen, Pleuelstangenköpfen u. s. w.).

171. Die Schraube. Eine Schraubenlinie entsteht, wenn ein beweglicher Punkt auf dem Mantel eines Cylinders gleichzeitig eine Rotation und eine Translation um die Cylinderachse, bezw. parallel zu derselben mit gleichförmiger Geschwindigkeit ausführt. Man unterscheidet je nach dem Umlaufssinne rechts- und linksgängige Schraubenlinien.

Gehört der bewegliche Punkt einer Figur an, deren Ebene während der Bewegung fortwährend durch die Cylinderachse geht, so heißt der von der Figur beschriebene Raum ein Schraubengewinde. Am häufigsten kommen im Maschinenbau solche Schraubengewinde vor, welche von einem Quadrate oder einem (gewöhnlich nahezu gleichseitigen) Dreiecke beschrieben sind; jene werden flache, diese scharfe Gewinde genannt.

Aufg. 79. Zeichne a) den Aufriß einer rechtsgängigen und einer linksgängigen Schraubenlinie; b) die Abwickelung derselben; c) den Aufriß eines flachen und eines scharfen Gewindes.

Was ist unter Ganghöhe, Steigungswinkel der Schraubenlinie, unter Schraubenmutter und Schraubenspindel, unter mehrfachem Gewinde zu verstehen?

172. Man unterscheidet vier verschiedene Schraubenvorrichtungen, welche in den Fig. 27—30 dargestellt sind. Bei der ersten bildet die Mutter (M) das Gestell, die Spindel (S) bewegt sich schraubenförmig; bei der zweiten ist es umgekehrt. Bei der dritten und vierten kommt noch ein weiterer Maschinenteil G hinzu, welcher das Gestell bildet; mit diesem ist in Fig. 29 S durch Drehkörper- und M durch Prismenpaar verbunden, während in

Fig. 30 umgekehrt S die fortschreitende und M die drehende Bewegung ausführt.

Beisp. s. Fig. 29: Schraubstock, Leitspindeldrehbank; s. Fig. 30: Vorschubmechanismus der Bohrmaschine.

Fig. 27.

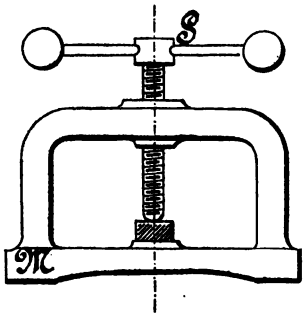
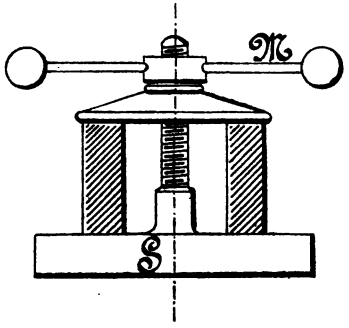


Fig. 28.



173. Sieht man von den Reibungen ab, so wirken an der beweglichen Schraubenspindel in Fig. 27 folgende Kräfte: 1) die Kraft P an dem auf S aufgesetzten Griffe (an dessen Stelle auch

Fig. 29.

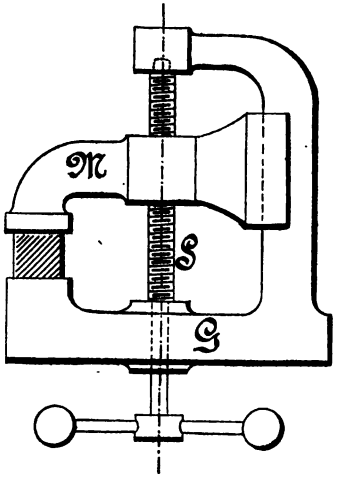
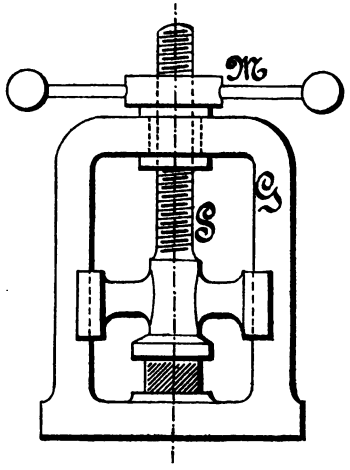


Fig. 30.



ein Zahnrad, eine Riemenscheibe oder dergleichen treten kann), welche das Einschrauben herbeiführt, 2) die im Gewinde von der Mutter auf die Spindel übertragenen Normalkräfte N, welche sich

in nicht näher angebbarer Weise über die Eingriffsfläche verteilen, 3) die sich der fortschreitenden Bewegung der Schraubenspindel widersetzende Kraft Q, welche von dem zusammengedrückten Körper auf jene übertragen wird.

Um die Beziehung, welche zwischen den Kräften P und Q stattfindet, abzuleiten, verwendet man am einfachsten den vierten Hauptlehrsatz. Wir betrachten die Arbeiten der Kräfte bei einer einmaligen Umdrehung der Schraubenspindel. Die Kräfte N leisten hierbei keine Arbeit, da ihre Angriffspunkte sich in jedem Augenblicke rechtwinklig zur Richtungslinie verschieben (§ 85). Beim Einschrauben ist die Arbeit von P positiv und gleich $P2p\pi$, wenn p die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P von der Achse bedeutet; die Arbeit der Kraft Q ist negativ und hat den Wert Qh (h = Ganghöhe). Wir erhalten daher die Gleichgewichtsbedingung

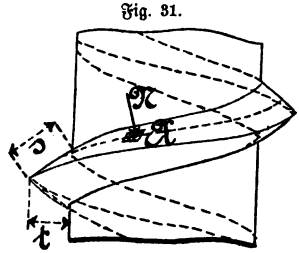
$$2Pp\pi = Qh.$$

Aufg. 80. Wie muß man die Schraube konstruieren a) um mit Hilfe eines kleinen P ein großes Q, b) um mit Hilfe eines kleinen Q ein großes P zu überwinden? Zahlenbeispiele!

Welche Beziehung besteht zwischen der Schraube und der schiefen Ebene?

174. Die am häufigsten zur Anwendung gelangende Schraube mit kleiner Ganghöhe (zur Überwindung eines großen Q) gehört zu denjenigen Vorrichtungen, an welchen die Reibungen einen sehr erheblichen Einfluß auf die Beziehung zwischen den übrigen Kräften ausüben.

Fig. 31.



Bezeichnet man die Länge eines Umlaufes der Schraubenlinie, welche durch einen Punkt A der Gewindefläche geht (Fig. 31) mit l, so ist die auf die Überwindung der Reibung Nf zu verwendende Arbeit $= Nfl$ und an die Stelle der früheren Gleichgewichtsbedingung tritt, wenn P die treibende Kraft ist,

$$2Pp\pi = Qh + \Sigma Nfl.$$

An die Stelle des Faktors l in den Gliedern der Summe kann ein mittlerer Wert eingesetzt werden, da der Gewindequerschnitt

bei den gewöhnlich verwendeten Schrauben klein ist im Vergleiche zum Kerndurchmesser. Der Faktor f hat ohnehin überall denselben Wert. Die Gleichung läßt sich daher schreiben

$$2Pp\pi = Qh + fl\Sigma N.$$

Zur Ermittelung des Wertes von ΣN wenden wir den zweiten Hauptlehrsatz an und projizieren alle an der Schraubenspindel wirkenden Kräfte auf die Schraubenachse. Bei der flachgängigen Schraube von geringer Ganghöhe sind die Normalkräfte N nahezu parallel zur Schraubenachse, die Reibungen nahezu senkrecht zu derselben gerichtet. Man kann daher näherungsweise (da es bei Berechnungen unter Berücksichtigung der Reibungen nur auf angenäherte Werte ankommt) $\Sigma N = Q$ setzen und erhält somit

$$2Pp\pi = Q\,(h + fl).$$

Die Reibung hat denselben Einfluß, als wenn die Ganghöhe h um fl vergrößert wäre.

Bezeichnet bei der scharfgängigen Schraube s den Schenkel des den Gewindequerschnitt bildenden gleichseitigen Dreiecks, t die Höhe desselben (d. i. die „Gangtiefe"), so erhält man in derselben Weise

$$P2p\pi = Q\left(h + lf\frac{s}{t}\right).$$

Bedeckt, wie es gewöhnlich der Fall ist, das Gewinde die Kernoberfläche vollständig, so ist $s = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}h^2}$.

Die Reibung hat demnach beim flachen Gewinde einen kleinern Einfluß als beim scharfen. Daher kommt es, daß man im Maschinenbau das erstere fast ausschließlich bei Bewegungs-, das letztere bei Befestigungsschrauben anwendet.

Aufg. 81. Unter welchen Umständen ist der Nutzeffekt der Schraube 50%, 25% oder a%? Wann ist die Schraube selbstsperrend?

Aufg. 82. Wie groß ist der Nutzeffekt einer flachgängigen Schraube, wenn der Kerndurchmesser 4 cm, die Ganghöhe 0,7 cm, der Reibungscoeffizient 0,15 ist? Ist sie selbstsperrend?

Aufg. 83. Ermittele die zwischen P und Q bestehende Gleichung für die flachgängige oder scharfgängige Schraube, wenn die Ganghöhe groß ist, die Projektion von N auf die Cylinderachse also nicht

näherungsweise gleich N, bezw. gleich $N\frac{s}{t}$ gesetzt werden und auch die Projektion der Reibung nicht vernachlässigt werden darf.

175. Bei der Behandlung der Schraube in der ersten Anordnung (Fig. 27) wurde keine Rücksicht genommen auf die Reibung zwischen dem unteren Ende der Schraubenspindel und der Druckplatte bezw. dem zusammengepreßten Körper. Das ist immer zulässig, wenn das untere Ende der Schraubenspindel abgerundet ist, so daß es den gedrückten Körper nur in einer kreisförmigen Fläche berührt. Denn die hier auftretenden Reibungen werden nur auf einem kleinen Wege überwunden, so daß das ihnen entsprechende Glied der Arbeitsgleichung nicht in Betracht kommt.

Anderenfalls sind die Gleichungen des § 174 durch diejenigen des § 176 zu ersetzen.

176. Bei der zweiten Schraubenvorrichtung (Fig. 28) sind die an der beweglichen Mutter wirkenden Kräfte zu betrachten. Wenn keine Reibung wirkt, erhalten wir durch die Anwendung des vierten Hauptlehrsatzes wieder die frühere Formel.

Sollen die Reibungen berücksichtigt werden, so kommen hier neben den Gewindereibungen auch diejenigen zwischen der Mutter und der Unterlagscheibe in Betracht. Wird der mittlere Radius der ringförmigen Sitzfläche zwischen Mutter und Unterlagscheibe r genannt, so erhält man für die flachgängige Schraube die Gleichung

$$P2p\pi = Q\,(h + lf + 2\pi rf).$$

Da $2\pi r$ jedenfalls größer als l ist (bei geringer Ganghöhe), so zeigt sich, daß der Einfluß der Reibung bei der Anordnung der Fig. 28 gegenüber jener der Fig. 27 mehr als verdoppelt ist.

Ist die Schraube scharfgängig, so ist dem zweiten Gliede in der Klammer der vorigen Gleichung der Faktor $\frac{s}{t}$ beizusetzen.

177. Auch für die dritte und vierte Anordnung (Fig. 29 und 30) gilt, wenn die Reibungen unberücksichtigt bleiben, die Gleichung

$$P2p\pi = Qh.$$

Man beweist dies, indem man bei der dritten Anordnung für die Spindel den vierten und für die Mutter den zweiten Hauptlehrsatz anwendet. Die

Normalkräfte an den Gewindeflächen leisten hier negative Arbeiten an der Spindel, da die Bewegungsrichtung des Angriffspunktes einen stumpfen Winkel mit der Kraftrichtung einschließt. Dieser Winkel ist gleich einem Rechten vermehrt um den Steigungswinkel der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie. Projiziert man die Kraft auf die Wegerichtung, so ist das entstehende rechtwinklige Dreieck bei flachem Gewinde demjenigen ähnlich, welches entsteht, wenn man die Kraft auf eine Parallele zur Schraubenachse projiziert. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt, daß die bei einer Umdrehung geleistete Arbeit gleich der Projektion der Normalkraft auf die Schraubenachse multipliziert mit der Ganghöhe ist. Die Summe dieser Projektionen ist aber nach dem für die Mutter angewendeten zweiten Hauptlehrsatze gleich Q, woraus der Satz folgt.

Für die vierte Anordnung (Fig. 30) läßt sich der Beweis in derselben Weise führen; bei scharfem Gewinde ist N zunächst in zwei zu einander senkrechte Komponenten zu zerlegen, von denen eine radial steht und keine Arbeit leistet.

178. Unter Berücksichtigung der Reibungen gilt für die vierte Anordnung dieselbe Gleichung wie für die zweite (§ 176). Es kommt hier allerdings noch die Reibung zwischen dem verschieblich gelagerten Stücke und dem Gestelle hinzu. Dieselbe ist aber an sich nur geringfügig (aus der Anwendung des Momentensatzes auf das verschieblich gelagerte Stück ergiebt sich, daß schon die entstehenden Normalkräfte nicht bedeutend sind) und kann daher als Summenglied neben der großen Kraft Q vernachlässigt werden.

Für die dritte Anordnung gestaltet sich das Verhältnis etwas ungünstiger, weil hier die Richtungslinie der Kraft Q nicht mit der Schraubenachse zusammenfällt. Es entstehen hierdurch weitere Normalkräfte zwischen M einerseits und S und G andererseits, die neue Reibungswiderstände zur Folge haben. Diese Anordnung ist daher die ungünstigste, wenn die Schraube als Bewegungsschraube Verwendung finden soll. Übrigens läßt sich einerseits auch die Anordnung der Fig. 29 so ausführen, daß die Richtungslinie von Q mit der Achse zusammenfällt und andererseits findet man auch die vierte Anordnung häufig in der Weise abgeändert, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist.

179. Bei geringer Ganghöhe sind alle Schraubenvorrichtungen selbstsperrend; es kann also P immer nur die treibende und Q die überwundene Kraft sein. Zuweilen wendet man aber Schrauben

von sehr großer Ganghöhe und zwar vorzugsweise in der dritten Anordnung (Fig. 29) an, bei denen Q die treibende Kraft ist. Das bekannteste Beispiel hierfür ist der Drillbohrer. Die Schraube ist hier mit mehrfachem Gewinde versehen.

Läßt man ein Rechteck oder Quadrat sich so bewegen, daß die Schraubenachse senkrecht steht auf der Ebene der Figur und fortwährend durch die Mitte derselben geht, während die Eckpunkte der Figur Schraubenlinien von großer Ganghöhe beschreiben, so erhält man eine Schraubenspindel, welche in der Anordnung der Fig. 29 ebenfalls nicht selten im Maschinenbau verwendet wird. Auch hier ist Q die treibende und P die überwundene Kraft. Die Reibung ist aber hier von weit größerem Einflusse, als bei der Anwendung einer gewöhnlichen flachgängigen Schraube. Beweis!

Drittes Kapitel.

Zusammengesetzte Maschinen.

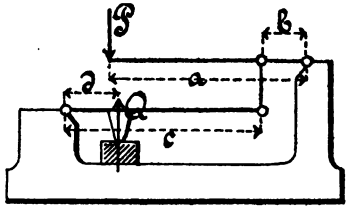
180. Diese kommen in so großer Mannichfaltigkeit vor, daß man gar nicht daran denken kann, alle oder auch nur den größten Teil derselben in einem Lehrbuche der Mechanik zu behandeln. Das ist aber auch nicht nötig; es genügt vielmehr vollständig, die Art der Berechnung der an denselben wirkenden Kräfte an einigen besonders wichtigen Beispielen zu zeigen.

Bei vielen Arbeitsmaschinen ist eine genaue Berechnung der Kräfte überhaupt nicht möglich; man muß sich mit der Betrachtung des Bewegungszusammenhangs und der Berechnung der Geschwindigkeiten begnügen. Über die ungefähre Größe der vorkommenden Kräfte gibt die Erfahrung mit ausgeführten Maschinen gleicher Art Aufschluß. Zur richtigen Deutung der Erfahrungs- oder Versuchsergebnisse muß man freilich auch in diesen Fällen mit der Anwendung der Mechanik auf die Behandlung der Maschinen wohl vertraut sein.

181. Die Hebelverbindungen verwendet man entweder, um mit Hilfe einer Kraft P (Fig. 32) eine weit größere Q zu überwinden oder um durch eine kleine Bewegung des Angriffspunktes von Q die weit größere des Angriffspunktes von P hervorzurufen.

Hat man zwei Hebel, die wie in Fig. 31 durch eine Druckstange verbunden sind und bezeichnet man die durch letztere übertragene Kraft mit D, so erhält man aus

Fig. 32.



$$Pa = Db \text{ und } Dc = Qd$$

die Gleichung zwischen P und Q

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}.$$

Man kann dieselbe so aussprechen: Das Übersetzungsverhältnis einer Hebelverbindung ist gleich dem Produkte aus den Übersetzungsverhältnissen der einzelnen Hebel. (Gilt auch für mehr als zwei Hebel. Beweis!)

Aufg. 84. Welche Beziehung besteht zwischen den Wegen der Angriffspunkte von P und Q bei einer sehr kleinen Bewegung?

Aufg. 85. Wie läßt sich die Hebelverbindung mit Hilfe des Arbeitslehrsatzes behandeln?

182. Die Hebelverbindungen haben vor allen übrigen Vorrichtungen den Vorteil, daß die Reibung nur einen sehr geringen Einfluß hat. Dagegen besteht der Nachteil, daß sie die Kraft Q nur auf einem sehr kleinen Wege überwinden können. Sie können daher nur dort verwendet werden, wo der Weg des Angriffspunktes von Q klein sein darf, z. B. bei Stanz-, Prägmaschinen, Scheren, ferner bei Meßinstrumenten, zu Fühlhebeln (von Manometern) u. s. w.

183. Zur Konstruktion der Gewichtswagen werden Hebel in vielfältigster Anordnung benützt. Es genügt hier, die gemeine oder gleicharmige Wage und die gewöhnliche Dezimalwage näher zu betrachten.

Von der gleicharmigen Wage verlangt man, daß sie drei Bedingungen erfülle; sie muß nämlich 1) richtig, 2) stabil sein und 3) eine dem besonderen Zwecke angepaßte Empfindlichkeit besitzen. Man nennt die Wage richtig, wenn sich der Wagebalken immer dann horizontal stellt, wenn in den beiden Wagschalen gleiche Gewichte liegen. Sie ist stabil, wenn ein kleines Übergewicht auf einer Seite nur eine begrenzte Rotation des Wagebalkens zur

Folge hat, so daß dieser in einer neuen Lage, welche mit der horizontalen einen gewissen Winkel bildet, ins Gleichgewicht kommt. Der Winkel heißt der Ausschlag der Wage. Je größer der Ausschlag für ein gegebenes Übergewicht ist, desto empfindlicher ist die Wage.

Zur Richtigkeit der Wage gehört, daß sie im unbelasteten Zustande einspiele (läßt sich durch eine zusätzliche Belastung einer Wagschale, durch verschieben eines Laufgewichtes u. s. w. stets erreichen) und daß die beiden Hebelarme genau von gleicher Größe sind. Um sich hiervon zu überzeugen, vertauscht man beide Gewichte miteinander; spielt die Wage dann immer noch ein, so ist sie richtig.

Aufg. 86. Man will mittelst einer falschen Wage das richtige Gewicht Q eines Körpers ermitteln; legt man Q in die eine Wagschale, so erhält man durch Abwägen das scheinbare Gewicht Q_1; legt man um, so ist das scheinbare Gewicht Q_2, wie groß ist Q?

Anl. z. L. Man schreibe die Momentengleichungen an und multipliziere letztere so miteinander, daß sich aus dem Resultate die Hebelarme gegeneinander wegheben.

Aufg. 87. Wenn bei einem solchen Versuche $Q_1 = 7{,}892\,^{gr}$ und $Q_2 = 7{,}806\,^{gr}$ war, wie groß ist der Fehler, den man begeht, wenn man an Stelle des richtigen Wertes von Q (vor. Aufg.) die halbe Summe von Q_1 und Q_2 nimmt?

184. Stabilität und Empfindlichkeit der Wage hängen 1) von der Lage des Schwerpunktes des Wagebalkens zum Drehpunkte und von dem Balkengewichte und 2) von der gegenseitigen Lage der Aufhängepunkte der Wagschalen und des Drehpunktes ab. Fällt der Schwerpunkt mit dem Drehpunkte zusammen, so kommt nur der unter 2) genannte Umstand in Betracht. Liegt er über dem Drehpunkte, so ist die Wage nicht stabil; liegt er darunter, so ist die Wage um so unempfindlicher, je tiefer er liegt und je schwerer der Wagebalken ist. (Beweis!)

Liegen die Aufhängepunkte der Wagschalen mit dem Drehpunkte in einer Geraden, so hängen Stabilität und Empfindlichkeit der Wage nur noch von dem unter 1) genannten Umstande ab, und zwar so wie es oben erörtert wurde. Eine Wage dieser Art ist aber für das Abwägen sehr großer Gewichte zu sehr und für kleine Gewichte zu wenig empfindlich. Man sucht daher für genaue

Wagen den Schwerpunkt möglichst nahe mit dem Drehpunkte zusammenfallen zu lassen und macht zugleich den Wagebalken möglichst leicht (z. B. aus Aluminium). Das Verhalten der Wage hängt dann fast ausschließlich von 2) ab.

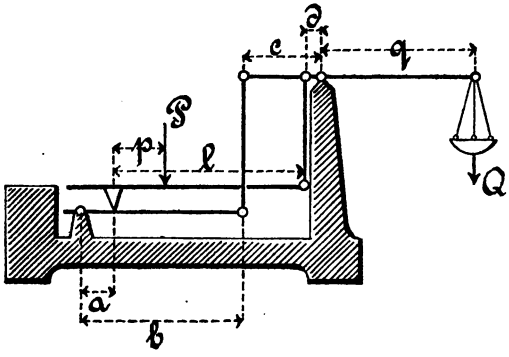
Bilden die drei Punkte ein gleichschenkliges Dreieck mit nach unten gekehrter Spitze, so ist die Wage labil; im entgegengesetzten Falle ist sie stabil und desto empfindlicher, je mehr sich der Winkel an der Spitze einem Gestreckten nähert. (Beweis!)

Aufg. 88. Wie groß muß der eben erwähnte Winkel sein, wenn der Ausschlag 1^0 betragen soll für ein Übergewicht von 1^{mgr}, wenn der Schwerpunkt mit dem Drehpunkte zusammenfällt und die Wagschale mit Inhalt 100^{gr} wiegt?

Aufg. 89. Dasselbe für den Fall, daß der Schwerpunkt 3^{mm} unter dem Drehpunkte liegt, jeder Hebelarm 30^{cm} und das Gewicht des Wagebalkens 600^{gr} beträgt.

185. Die Dezimalwage besteht neben dem Gestell aus folgenden Hauptteilen: der Brücke, welche an die Stelle der einen Wagschale tritt und auf welche der Körper gelegt wird, dessen Gewicht P gemessen werden soll, dem unteren und dem oberen Hebel. Das rechte Ende der Brücke und des unteren Hebels ist durch je eine Zugstange mit dem oberen Hebel verbunden (Fig. 33).

Fig. 33.



Zur Ermittelung der Beziehung zwischen P und Q wendet man den Momentensatz auf jeden der drei genannten Körper (und zwar für die Brücke zweimal) an und erhält so vier Gleichungen, in denen neben P und Q noch drei Hilfskräfte vorkommen. Es sind dies der Auflagerdruck A der Brücke auf den unteren Hebel, die Kraft B, welche die Brücke und die Kraft C, welche der untere

Hebel auf den oberen vermittelst der Zugstange überträgt. Aus der Gleichgewichtsbedingung für die Brücke erhält man (vgl. Aufg. 47, S. 51)

$$A = P\frac{l-p}{l}; \quad B = P\frac{p}{l}.$$

Das Hebelgesetz für den unteren Hebel liefert

$$C = A\frac{a}{b} = P\frac{al-ap}{bl}$$

und ebenso ergiebt sich bei Anwendung desselben auf den oberen Hebel

$$Qq = Bd + Cc = P\frac{alc-apc+bpd}{bl}.$$

Wenn die Vorrichtung als Wage brauchbar sein soll, muß es für das Verhältnis zwischen P und Q gleichgültig sein, an welcher Stelle der Brücke die Last P aufgelegt wird; d. h. die mit p behafteten Glieder müssen sich in der vorstehenden Gleichung gegeneinander wegheben. Wir erhalten so die Bedingungsgleichung

$$bpd = apc \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{d},$$

d. h. das Verhältnis der nach links gehenden Hebelarme des oberen Hebels muß dem Verhältnisse der Hebelarme des unteren Hebels gleich sein.

Unter Berücksichtigung dieser notwendigen Bedingung geht die vorige Gleichung über in

$$Qq = P\frac{ac}{b} = P.d.$$

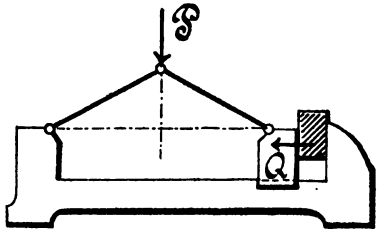
Soll die Wage ferner eine Dezimalwage sein, so muß $P = 10\,Q$ und daher $q = 10d$ sein.

Stabilität und Empfindlichkeit der Dezimalwage hängen in ähnlicher Weise von der Gestalt des oberen Hebels ab, wie es bei der gleicharmigen Wage besprochen wurde.

186. Die sogenannte Kniehebelvorrichtung wird gewöhnlich auch zu den Hebelverbindungen gerechnet. Besser würde sie eigentlich der Keilvorrichtung anzuschließen sein. Aus dieser (Fig. 25, S. 77) geht sie dadurch hervor, daß man den Keilkörper K nicht mehr mit G und W in unmittelbare Berührung bringt, sondern

zur Verminderung der Reibung eine Stelze dazwischen setzt; der Keilkörper geht dann in einen einfachen Gelenkzapfen über.

Fig. 34.



Die Berechnung erfolgt auch in derselben Weise wie es dort gezeigt wurde (§ 167).

Vor dem Keile hat der Kniehebel den Vorzug, daß die Reibung einen viel geringeren Einfluß hat. Außerdem unterscheidet er sich von demselben noch wesentlich dadurch, daß der Winkel des gleichwertigen Keiles sich während des Einpressens fortwährend verringert, so daß ein um so größerer Druck auf den gepreßten Körper ausgeübt werden kann, je mehr dieser bereits zusammengedrückt ist.

Fig. 35.

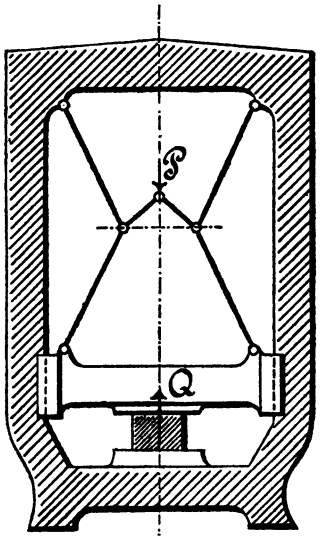


Fig. 36.

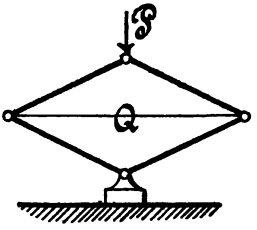
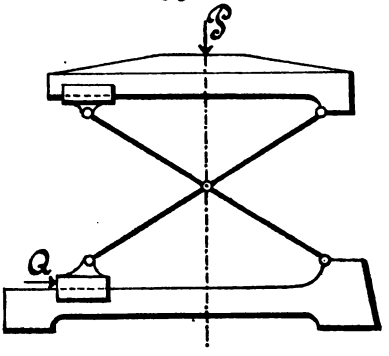


Fig. 37.



Auf. 90. Welche Beziehung besteht zwischen P und Q und den Stücken des durch die drei Gelenkzapfen gebildeten gleichschenkligen Dreiecks?

Aufg. 91. Zeichne den Kräfteplan für die an der Kniehebelverbindung Fig. 35 wirkenden Kräfte!

Aufg. 92. Wie berechnet man die Kräfte, welche an dem Bewegungsmechanismus des Halifax-Schlittschuhes auftreten?

Aufg. 93. Wie groß ist die Spannung Q des in die Diagonale des Stangenvierecks Fig. 36 fallenden Seiles, wenn die in die Richtung der anderen Diagonale fallende Kraft P dasselbe zusammendrückt?

Aufg. 94. Ermittele die Beziehung zwischen den Kräften P und Q an der Vorrichtung Fig. 37 (ohne Berücksichtigung der Reibung) a) mit Hilfe des Momentensatzes, b) mit Hilfe des Arbeitslehrsatzes.

Anl. z. L. Sieht man P als gegeben an, so kommen im ganzen sechs unbekannte Kräfte von gegebener Richtung und gegebenem Angriffspunkte vor, nämlich Q, die beiden Komponenten des im Kreuzungspunkte der Stangen zwischen denselben übertragenen Drucks, die beiden Komponenten des Auflagerdrucks der mit dem Gestell drehbar verbundenen Stange und die Normalkraft zwischen dem Gleitstück und dem Gestell. Man schreibe a) drei Momentengleichungen für jede der beiden Stangen in Bezug auf die Zapfenmittelpunkte an und löse sie nach den Unbekannten auf. Oder b) man ermittele die Arbeiten aller an sämtlichen beweglichen Körpern wirkenden Kräfte. Bei der Bildung der algebraischen Summe, die Null ergeben muß, fallen alle Glieder fort mit Ausnahme der Arbeiten von P und Q.

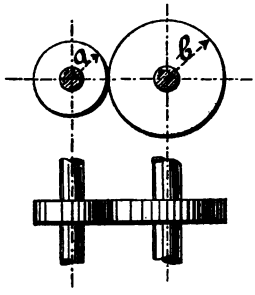
Aufg. 95. Durch Übereinandersetzen einer Reihe von Stangenkreuzen (wie in Fig. 37) entsteht die sogenannte Schere. Ermittele die Beziehung zwischen P und Q für dieselbe. (Arbeitslehrsatz!)

187. Besonders häufig kommen im Maschinenbau die **Wellradverbindungen** vor. Um zwei Wellräder, die in einem gemeinschaftlichen Gestelle gelagert sind, so mit einander in Eingriff zu bringen, daß die Umdrehung einer Welle diejenige der anderen zur notwendigen Folge hat, verwendet man entweder **Reibungsräder** oder **Zahnräder** oder **Riemenscheiben** mit Riemen. Es sind dabei drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich die Verbindungen zwischen Wellen, deren Mittellinien entweder parallel sind oder sich schneiden oder windschief zu einander liegen.

188. Das einfachste Mittel zur Verbindung zweier **paralleler Wellen** bilden die **cylindrischen Reibungsräder** (auch Friktionsscheiben genannt). Sie werden indessen nur selten angewendet, weil ein sicherer Eingriff nur schwer zu erzielen ist und sich nur durch ein Aufeinanderpressen der Scheibenumfänge erreichen läßt.

Die Entfernung der Wellenachsen muß gleich $a + b$ sein (vgl. Fig. 38) und die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Fig. 38.



189. Um einen sicheren Eingriff zu erhalten, ersetzt man die Reibungsräder durch cylindrische Zahnräder, sogenannte Stirnräder. Diese haben den wichtigen Vorzug, daß das Verhältnis der Umdrehungszahlen stets genau dem umgekehrten Verhältnisse der Zähnezahlen gleich ist. Für viele Fälle der Anwendung bilden sie aus diesem Grunde das allein zulässige Verbindungsmittel paralleler Wellen. (So darf z. B. bei einer Drehbank, welche zum Gewindeschneiden benutzt werden soll, der Antrieb der Leitspindel für die Supportbewegung nicht, wie es im anderen Falle häufig geschieht, durch einen Riementrieb vom Spindelstocke aus erfolgen.)

Zwei im Eingriff befindliche Stirnräder können durch zwei gleichwertige Reibungsräder ersetzt gedacht werden, d. h. durch zwei solche, welche dasselbe Geschwindigkeitsverhältnis der beiden Wellen zur Folge haben würden. Man nennt die, die Umfänge dieser gleichwertigen Reibungsräder bildenden Kreise die Teilkreise der Zahnräder. Der Teilkreis eines Zahnrades ist äußerlich an demselben nicht erkennbar; er verläuft ungefähr durch die Mitten der Zahnhöhen, so jedoch, daß das dem Mittelpunkte zugewendete Stück der Zahnhöhe etwas größer ist als das andere. Bei der Konstruktion der Zahnräder geht man stets vom Teilkreise aus. Das Bogenstück des Teilkreises, welches einem Zahne (samt der zugehörigen Lücke) entspricht, heißt die Teilung des Zahnrades. Zwei im Eingriff stehende Zahnräder haben streng gleiche Teilung. (Beweis!)

Neben dem gewöhnlich vorkommenden Falle außen verzahnter Räder verwendet man zuweilen auch innen verzahnte, d. h. solche, deren Teilkreise sich von innen berühren. Während bei jenen der Umdrehungssinn beider Räder entgegengesetzt ist, drehen diese sich in gleichem Sinne herum. (Mühlräder tragen z. B. häufig einen

Zahnkranz auf ihrem Umfange, dessen Zähne nach innen gekehrt und im Eingriffe mit denjenigen eines kleinen Rades sind, das auf einer die Bewegung in das Innere des Gebäudes führenden Welle aufgekeilt ist.)

Aufg. 97. Zwei parallele Wellen haben einen Abstand von 80 cm; sie sollen durch zwei außen verzahnte Stirnräder von 18 bezw. 64 Zähnen verbunden werden. Wie groß sind die beiden Teilkreishalbmesser und die Teilung der Räder?

Aufg. 98. Dasselbe für zwei innen verzahnte Räder!

Aufg. 99. Eine Welle macht 100 Touren; eine zu ihr parallele soll durch außen verzahnte Stirnräder durch sie angetrieben werden, so daß sie 450 Touren macht. Wie groß sind die Teilkreishalbmesser und der Wellenabstand zu machen, wenn man für das kleine Rad 20 Zähne nimmt und die Teilung (mit Rücksicht auf die Größe der wirkenden Kräfte) zu 35 mm genommen werden muß?

Aufg. 100. Sechs Wellen sind hintereinander durch Stirnräder verbunden. Das Rad der ersten Welle hat 75, das im Eingriff damit stehende der zweiten Welle 25 Zähne; auch die übrigen Räder haben abwechselnd 75 und 25 Zähne. Wieviel Touren macht die sechste Welle, wenn die erste 40 macht?

190. Wenn auch das Umdrehungsverhältnis zweier Zahnräder durch die Verzahnung im ganzen streng aufrecht erhalten wird, so kann doch das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten kleinen periodischen Schwankungen unterliegen. Um diese zu vermeiden, muß man den Zahnflanken eine geeignete Gestalt geben. In der Maschinenkonstruktionslehre wird gezeigt, daß sich hierzu am besten entweder Cycloiden- oder Kreisevolventenbögen eignen.

191. Sogenannte *unrunde Zahnräder* verwendet man, um von einer Welle, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, eine andere mit periodisch veränderlicher Geschwindigkeit anzutreiben. Häufig wird z. B. ein centrisch aufgekeiltes elliptisches Rad im Eingriff mit einem excentrisch gelagerten kreisrunden Rade verwendet. Der Umfang der Ellipse muß hierbei doppelt so groß sein als derjenige des Kreises, und die Entfernung des Kreismittelpunktes von der Drehachse (die Excentrizität) muß halb so groß sein als die Differenz der Halbachsen der Ellipse.

Auch zwei kongruente elliptische Räder, von denen sich jedes um einen seiner Brennpunkte dreht, benutzt man zu dem gleichen

Zwecke; oder ein centrisch und ein excentrisch gelagertes kreisrundes Rad, wobei die Welle des letzteren sich parallel zu der anderen (durch einen besonderen Kurbelmechanismus) verschiebt.

Man gebraucht diese unrunden Räder mit periodisch veränderlichem Geschwindigkeitsverhältnis besonders bei Arbeitsmaschinen mit hin- und hergehender Bewegung, z. B. um die Zeit für den leeren Rückgang abzukürzen.

Aufg. 101. Der Teilriß eines elliptischen Rades hat die Halbachsen 40 und 30 cm. Wie groß muß der Radius und die Excentrität des damit in Eingriff stehenden kreisrunden Rades sein?

Anl. z. L. Konstruiere die Ellipse und ermittle durch möglichst genaues Abstechen mit Hilfe des Zirkels den halben Umfang; bestimme hieraus den Radius (s. oben) und hierauf die Excentrität.

Aufg. 102. Konstruiere das Diagramm der Winkelgeschwindigkeit der Welle, auf welcher das elliptische Rad sitzt, wenn die andere Welle gleichförmig rotiert.

192. Der Riementrieb zur Verbindung paralleler Wellen geht aus den Reibungsrädern dadurch hervor, daß man diese (Fig. 38) auseinanderrückt und um die Umfänge einen in sich zurücklaufenden elastischen Riemen (bezw. eine Schnur oder ein Seil) schlingt, der im Ruhezustande genügend angespannt ist. Während des Betriebes steigt die Spannung des einen, des sog. führenden Riemenstücks oder Riementrums, während diejenige des anderen sinkt. Die Differenz beider Spannungen bildet die treibende Kraft, welche dem Zahndrucke bei Verbindung durch Zahnräder entspricht.

Man unterscheidet offenen und geschränkten Riementrieb; der letztere hat den Vorteil, daß ein größerer Teil des Umfangs jeder Riemenscheibe umschlungen wird, so daß ein Gleiten des Riemens weniger leicht eintreten kann. Bei jenem haben beide Wellen gleichen, bei diesem entgegengesetzten Umlaufssinn.

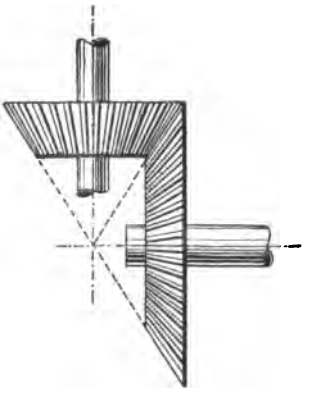
Hinsichtlich des Winkelgeschwindigkeitsverhältnisses gilt das oben (§ 188) Gesagte.

Warum wölbt man die Riemenscheiben? Wie kommt der sog. Schlipf zu stande? Wie groß muß die Spannung des ruhenden Riemens mindestens sein?

193. Wellen, deren Mittellinien nicht nur gleichgerichtet sind, sondern auch in eine Gerade fallen, kann man entweder zu einer einzigen Welle fest mit einander verbinden (feste Kuppelung); oder

man richtet die Verbindung lösbar ein (Klauenkuppelung und Friktionskuppelung); oder man verbindet sie, z. B. durch unrunde Räder, so, daß ihre Winkelgeschwindigkeiten verschieden sind. Der letzte Fall kommt aber nur selten vor.

Fig. 39.

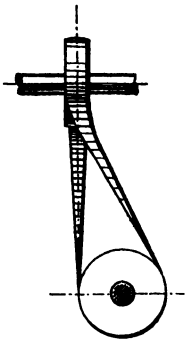


194. Wellen, deren Mittellinien sich schneiden, lassen sich durch einen Riementrieb nur auf Umwegen (vermittelst sog. Leitrollen) verbinden. Dagegen kann der Eingriff leicht durch kegelförmige Reibungsräder (die aber nur selten angewendet werden) oder durch ebensolche Zahnräder, sog. Kegelräder oder konische Räder bewirkt werden. Wesentlich ist die Bedingung, daß beide Kegelspitzen (Fig. 39) mit dem Schnittpunkte der Wellenmittellinien zusammenfallen müssen. (Beweis!)

Unter dem Teilkreise eines Kegelrades versteht man den größeren Grundkreis eines gleichwertigen konischen Reibungsrades.

Aufg. 103. Zwei sich rechtwinklig schneidende Wellen sind durch Kegelräder von 20 bezw. 45 Zähnen zum Eingriff gebracht. Wie groß sind die Winkel, welche die Erzeugenden beider Teilkreiskegel mit den Wellenachsen bilden? Wie groß ist jeder Teilkreishalbmesser, wenn die Teilung 3 cm beträgt?

Fig. 40.



195. Wellen, die windschief zu einander liegen, werden entweder durch einen Riementrieb oder durch Zahnräder mit einander verbunden. Das erste Verbindungsmittel hat den Vorzug einfacherer Herstellung und eines geringen Arbeitsverlustes durch schädliche Reibungen, während dieser bei windschiefen Zahnrädern sehr bedeutend ist; dagegen den Nachteil, daß die Bewegung stets nur in derselben Richtung erfolgen, also nicht umgekehrt werden kann.

Der Riementrieb, welcher zwei zu einander senkrechte windschiefe Wellen verbindet, wird ein halbgeschränkter genannt.

Die Riemenscheiben müssen so auf die Wellen gesetzt sein, daß der Ablaufpunkt der Mittellinie jedes Riementrums in die Mittelebene der anderen Scheibe fällt, auf welche der Trum aufläuft. Der Riemen muß nämlich, wenn er nicht abfallen soll, jeder Scheibe gerade zugeführt werden, während es zulässig ist, daß er die Scheibe in schräger Richtung verläßt. Daher kommt es, daß der Riemen bei einer Umkehrung der Bewegung sofort abfällt.

196. Eine gerade Linie, welche mit einer zu ihr windschiefen fest verbunden ist, beschreibt bei einer Drehung der letzteren ein Rotationshyperboloid. Denkt man sich auf die Mittellinien zweier windschiefen Wellen zwei solcher Hyperboloide aufgekeilt, welche sich längs einer Erzeugenden berühren, so wird bei einer Drehung des einen das andere mitgenommen, wenn die beiden Erzeugenden nur längs ihrer Richtung gegeneinander gleiten können. Das letztere wird erreicht, wenn man an Stelle und in der Richtung der Erzeugenden Zähne setzt. Zwei in dieser Weise erhaltene Scheiben, welche demselben Stücke der Berührungserzeugenden entsprechen, vermitteln den verlangten Eingriff zwischen den windschiefen Wellen und werden *hyperbolische Räder* genannt.

Ein hyperbolisches Rad gleicht äußerlich einem Kegelrade, dessen Zähne schräg gegen die Kegelerzeugenden gestellt sind.

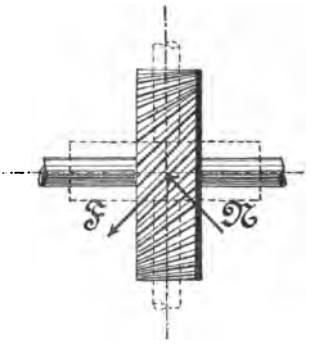
Schneidet man die beiden Scheiben aus den gezahnten Hyperboloiden an den Kehlkreisen aus, d. h. an jener Stelle der Berührungserzeugenden, welche auf der kürzesten Verbindungslinie der windschiefen Wellenachsen liegt, so erhält man zwei *Kehlkreisräder*. Diese gleichen äußerlich Stirnrädern mit schräg gegen die Cylindererzeugenden gestellten Zähnen.

Man nennt die Kehlkreisräder aus diesem Grunde auch *Schraubenräder*. Jeder Zahn kann nämlich als ein Stück eines Schraubengewindes aufgefaßt werden. Die Summe der Steigungswinkel der beiden Schraubenlinien auf den Teilkreiscylindern ergänzt den Winkel zwischen den Wellenachsen zu einem Gestreckten.

Aufg. 103. Zwei rechtwinklig zu einander stehende windschiefe Wellen sind durch zwei kongruente Schraubenräder verbunden. Wie groß ist der Nutzeffekt der Übertragung?

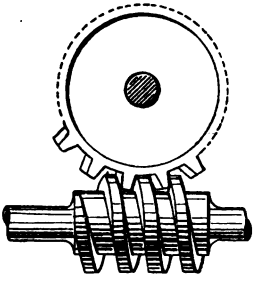
Anl. z. L. Dem Normaldrucke N (Fig. 41) entspricht die Reibung $F = fN$. Die Bewegungsrichtung halbiert den Winkel zwischen beiden. Die zur Überwindung der Reibung erforderliche Arbeit verhält sich daher zur Nutzarbeit wie f zu 1.

Fig. 41.



197. Eine besondere und sehr häufig angewendete Art von Schraubenrädern erhält man, wenn man den Steigungswinkel der einen Schraube so klein macht, daß dieselbe in eine gewöhnliche Schraube mit einfachem Gewinde übergeht. Der Steigungswinkel der anderen Schraube unterscheidet sich dann (bei rechtwinkligen Wellen) nur wenig von einem Rechten, d. h. das andere Schraubenrad weicht nur wenig von einem gewöhnlichen Stirnrade ab. Man nennt das so entstehende Getriebe ein Wurmgetriebe oder ein Schneckenrad mit Schnecke (Fig. 42).

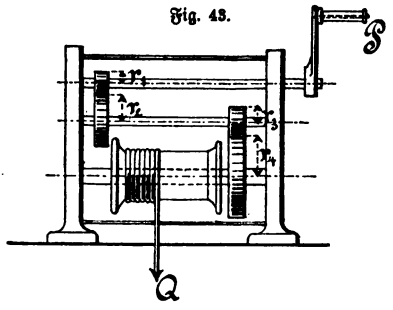
Fig. 42.



Die zur Überwindung der Reibung erforderliche Arbeit ist hier (unter gewöhnlichen Verhältnissen) größer als die Nutzarbeit. Das Getriebe giebt daher weniger als 50% Nutzeffekt und ist selbstsperrend.

198. Die Berechnung der an den Wellradverbindungen wirkenden Kräfte kann in der Regel auf Grund des Vorausgegangenen ohne jede Schwierigkeit erfolgen. Wir betrachten als Beispiel die Berechnung der gewöhnlichen Bauwinde. Dieselbe enthält drei Wellräder, die Kurbelwelle, eine Zwischenwelle und die Trommelwelle. Die treibende Kraft an der Kurbel heiße P und der Kurbelradius p, die am Seile hängende Last Q und

Fig. 43.



ihr Hebelarm (d. i. der Trommelradius vermehrt um die halbe Seildicke) q. Die Teilkreisradien der Räder sind in die Figur eingeschrieben, der Zahndruck zwischen den beiden ersten Rädern sei mit Z, der andere mit Z_1 bezeichnet. Der Momentensatz liefert die drei Gleichungen

$$Pp = Z.r_1; \quad Z.r_2 = Z_1.r_3; \quad Z_1.r_4 = Qq.$$

Durch Multiplikation derselben mit einander und nach Wegheben der gleichen Faktoren erhält man

$$Ppr_2r_4 = Qq\,r_1r_3 \text{ oder } \frac{P}{Q} = \frac{qr_1r_3}{pr_2r_4}.$$

(Vgl. § 181.) Der Einfluß der Reibung ist hierbei noch vernachlässigt. Man kann derselben (unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen) dadurch Rechnung tragen, daß man an Stelle der Last Q, welche man zu heben beabsichtigt, eine um 20 bis 25% größere in die Rechnung einführt.

Aufg. 104. Berechne eine Bauwinde, welche 1000 kgr heben soll!

Anl. z. L. Nehmen wir zwei Mann an der Kurbel an, so kann $P = 30$ kgr gesetzt werden. Den Kurbelradius darf man (mit Rücksicht auf die Größenverhältnisse des menschlichen Körpers) nicht größer als 40 cm nehmen. Der Hebelarm q kann (wegen der Steifheit des Seiles) nicht kleiner als etwa 12 cm gemacht werden. Die Verhältnisse $r_1 : r_2$ und $r_3 : r_4$ macht man (ungefähr) einander gleich. Den kleinen Rädern giebt man 12 bis 16 Zähne. Daraus ergiebt sich die Zähnezahl für die großen. Die Berechnung der Teilung und der Teilkreisradien kann nur auf Grund der Festigkeitslehre erfolgen.

Anm. Bei Wellradverbindungen (auch bei Winden) kommt häufig der Fall vor, daß eine Welle die andere (gewöhnlich die dritte die erste) umschließt. Jene ist dann hohl auszuführen. Man thut dies um an Raum zu sparen. Der Spindelstock einer gewöhnlichen Drehbank zeigt fast immer diese Anordnung. Die Berechnung der wirkenden Kräfte wird dadurch nicht berührt.

Aufg. 105. Ermittle die Beziehung zwischen den Kräften P und Q an der gewöhnlichen Schraubenwinde, die dadurch entsteht, daß man auf die Schneckenwelle (Fig. 42) eine Kurbel und auf die Welle des Schneckenrades eine Seiltrommel steckt, während beide Wellen in einem Gestelle gelagert sind. (Vierter Hauptlehrsatz; große Reibung!)

199. Zu den **Rollenverbindungen** zählt man den gewöhnlichen **Flaschenzug** (Fig. 44). Sieht man von Reibung und Seilsteifigkeit ab, so muß jedes Seilstück gleichstark gespannt sein. Die an der unteren Flasche hängende Last Q verteilt sich dann gleich-

mäßig auf die n Seilstücke, welche die beiden Flaschen verbinden (in der Figur sind es sechs) und man hat nach dem zweiten Hauptlehrsatze die Gleichgewichtsbedingung

$$P = \frac{1}{n} \cdot Q.$$

Fig. 44.

Wegen der Reibung und der Seilsteifigkeit hat aber jedes folgende Seilstück eine geringere Spannung als das vorhergehende. Fügt man daher noch weitere Rollen hinzu, so ist die Spannung der hinzukommenden Seilstücke erheblich geringer als P. Der Nutzeffekt nimmt daher mit der Zahl der Rollen ab. Man wendet aus diesem Grunde selten mehr als drei Rollen in einer Flasche an.

Aufg. 106. Wie lautet die Gleichung zwischen P und Q, wenn jedes folgende Seilstück wegen der Reibung und der Seilsteifigkeit a) die 0,9fache, b) die αfache Spannung des vorausgehenden hat und wie groß ist der Nutzeffekt?

200. Der Differentialflaschenzug (Fig. 45) besteht aus einem drehbar gelagerten Körper, welcher zwei Rollenumfänge von den Radien r_1 und r_2 an sich trägt und einer losen Rolle, an welcher die Last Q hängt. Um das Ganze ist eine in sich zurücklaufende Kette geschlungen, welche durch Vorsprünge auf den Rollenumfängen vor einem Herabgleiten auf denselben geschützt ist. Die Kettenstücke 2 und 3 (vgl. die Figur) sind nahezu parallel und daher mit $\frac{1}{2}Q$ gespannt. Das Kettenstück 4 hängt schlaff herab. Der Momentensatz liefert die Gleichung

Fig. 45.

$$Pr_1 + \tfrac{1}{2}Qr_2 = \tfrac{1}{2}Q \cdot r_1; \quad \text{oder} \quad P = Q\,\frac{r_1 - r_2}{2r_1}.$$

Um eine große Last Q heben zu können, muß man $r_1 - r_2$ klein machen gegen r_1. Die Reibung hat einen großen Einfluß, weil schon ein geringer Unterschied in der Spannung der Kettenstücke 2 und 3 die Differenz der Momente dieser Spannungen beträchtlich ändert. In den gewöhnlichen Ausführungen ist die Vorrichtung selbstsperrend.

Aufg. 107. Wie lautet die vorige Gleichung unter Berücksichtigung der Zapfenreibung, wenn die Zapfenradien

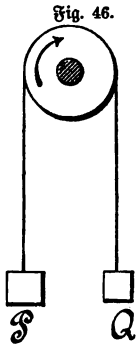
der unteren Rolle und der Doppelrolle mit ϱ_1 und ϱ_2, der Coefficient der Zapfenreibung mit f bezeichnet werden, die Reibung der Kettenglieder aber vernachlässigt werden kann a) wenn P, b) wenn Q die treibende Kraft ist? Wann ist der Flaschenzug selbstsperrend?

201. Die Verbindungen des Keiles, der schiefen Ebene und der Schraube unter einander und mit den drei ersten mechanischen Potenzen bieten nichts wesentlich neues. Von einigem Interesse ist zwar die sog. Differentialschraube; da sie aber in den Anwendungen nur selten vorkommt, soll darauf hier nicht eingegangen werden.

202. Einer besonderen Besprechung bedürfen noch die Instrumente zum Messen von Arbeitsleistungen. Man nennt sie Dynamometer, d. h. Kraftmesser, weil man mit ihrer Hilfe zunächst eine Kraft mißt und daraus durch Multiplikation mit dem Wege die geleistete Arbeit ermittelt.

Um z. B. die Zahl der Pferdekräfte zu bestimmen, welche eine Dampfmaschine oder eine Turbine liefert, löst man dieselbe von der Transmission los und bringt an dem Umfange einer auf der Hauptwelle sitzenden Scheibe eine widerstehende Kraft an, deren Größe man so lange ändert, bis die von dem Motor geleistete Arbeit gerade hinreicht, um unter Überwindung dieses Widerstandes den gleichförmigen Gang der Maschine aufrecht zu erhalten.

Fig. 46.



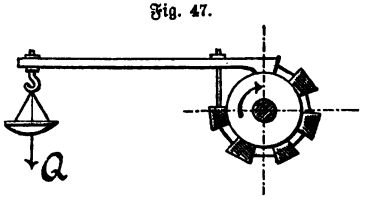
Die einfachste Vorrichtung dieser Art besteht aus einem Riemen (Fig. 46), den man um die Scheibe legt und dessen herabhängende Enden man mit Lasten P und Q (wo $P > Q$) so beschwert, daß der Riemen gerade an seiner Stelle bleibt, während die Scheibe unter ihm rotiert. Die von der Dampfmaschine zu überwindende Kraft ist die Reibung zwischen dem Riemen und dem Scheibenumfange oder $P - Q$. Bezeichnet r den Scheibenradius, n die Zahl der Umdrehungen der Hauptwelle in der Minute, N die Zahl der Pferdekräfte und mißt man in m und kgr, so ist

$$N = (P - Q) \cdot \frac{2r\pi n}{60.75}.$$

203. Das Bremsdynamometer von Prony (Fig. 47) besteht aus einem mit Holzklötzen, die auf dem Scheibenumfange

aufsitzen, versehenen Ringe, der vermittelst einer Schraube so fest angezogen wird, bis die von dem Motor gelieferte Arbeit gerade zur Überwindung der Reibungen bei festgehaltenem Ringe hinreicht. Man legt dann in die Wagschale des Bremshebels ein Gewicht Q, das gerade hinreicht, um die Vorrichtung an einer Mitnahme durch die rotierende Scheibe zu verhindern.

Fig. 47.



Bezeichnet man die Summe aller Reibungen am Scheibenumfange mit ΣF, so liefert der Momentensatz die Gleichung

$$r\Sigma F = Pp.$$

Andererseits ist aber $\Sigma F . 2r\pi$ die vom Motor bei einer Umdrehung geleistete Arbeit und daher

$$N = \frac{2Pp\pi n}{60 . 75}.$$

Die Normalkräfte zwischen den Holzklötzen und der Scheibe kommen weder in der Momentengleichung vor (weil ihre Richtungslinien durch den Momentenpunkt gehen), noch leisten sie Arbeiten (weil sie senkrecht zur Wegerichtung stehen).

Vierter Abschnitt.

Die Festigkeitslehre.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Elastizität und Festigkeit.

204. Im zweiten Abschnitte wurde gezeigt, daß die inneren Kräfte, welche in einem starren Körper auftreten, ohne Einfluß auf das äußere Verhalten des Körpers sind. In Wirklichkeit sind aber die festen Körper nicht starr, sie ändern vielmehr und verlieren

schließlich ihren Zusammenhang, wenn die inneren Kräfte über ein gewisses Maß hinausgehen. Es ist die erste Aufgabe der Festigkeitslehre, zu zeigen, wie groß die äußeren Kräfte an einem festen Körper werden dürfen, ohne daß derselbe merkliche Formänderungen erfährt oder zerbricht. Die zweite Aufgabe besteht in der Ermittelung der Abmessung, die man einem festen Körper geben muß, damit er den an ihm wirkenden äußeren Kräften mit Sicherheit zu widerstehen vermag. Da diese beiden Aufgaben nur durch die Berechnung der durch die äußeren hervorgerufenen inneren Kräfte gelöst werden können, kann man die Festigkeitslehre die *Mechanik der inneren Kräfte* fester Körper nennen.

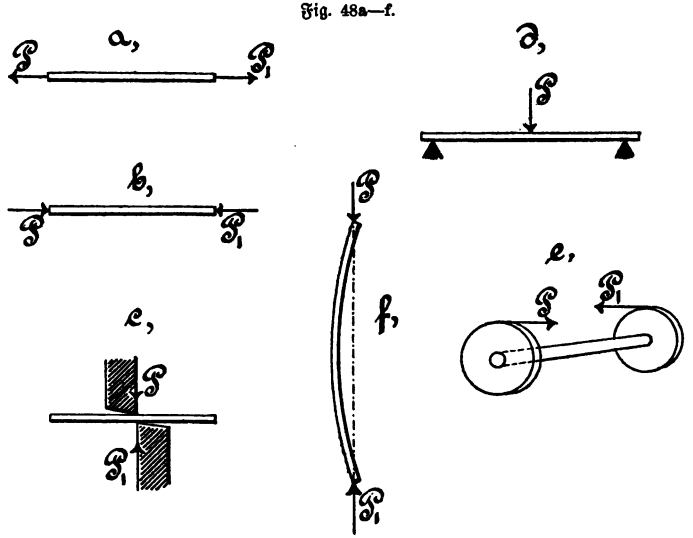
205. Die Behandlung der festen Körper als starre Körper entspricht nur einer ersten Annäherung an das wahre Verhalten derselben in der Natur. Eine zweite, und für fast alle technischen Anwendungen vollauf hinreichende Annäherung an die eigentliche Natur fester Körper erhält man, wenn man dieselben als *vollkommen elastische Körper* ansieht. Man kann unter dieser Annahme die Aufgaben der Festigkeitslehre bis zu einem befriedigenden und für die Praxis hinreichenden Grade lösen. Die Festigkeitslehre läßt sich daher auch als die *Mechanik der elastischen festen Körper* bezeichnen.

Allerdings zeigt das wahre Verhalten der Körper bald größere bald geringere Abweichungen von den in diesem Abschnitte zu entwickelnden Gesetzen. Diese selbst beanspruchen daher keine strenge Giltigkeit, wie sie den im ersten und zweiten Abschnitte besprochenen allgemeinen Sätzen der Mechanik zukommt. *Die Festigkeitslehre ist nur eine Näherungstheorie.* Der Anwendung in der Technik thut dieser Mangel aber keinen Abbruch.

206. Die für die Anwendungen wichtigste Gestalt eines festen Körpers ist die stabförmige, d. h. jene, bei welcher der Körper in einer Richtung eine weit größere Ausdehnung besitzt, als in den dazu senkrechten Richtungen. Man unterscheidet sechs verschiedene Beanspruchungsarten eines Stabes durch äußere Kräfte, auf welche sich alle übrigen zurückführen lassen. Sie sind durch die Fig. 48a—f zur Darstellung gebracht. Im ersten Falle suchen zwei einander gleiche Kräfte P und P_1 den Stab zu verlängern oder zu zerreißen.

Der Stab widersteht mit seiner Zugfestigkeit. In Fig. 48b suchen P und P_1 den Stab zu zerdrücken; er widersteht mit seiner Druckfestigkeit. In Fig. 48c suchen die Kräfte die eine Hälfte des Stabes an der anderen vorbeizuschieben oder abzuscheren; er widersteht mit seiner Schub- oder Scherfestigkeit. In Fig. 48d sucht die Kraft P den an seinen Enden unterstützten Stab durchzubiegen; er widersteht mit seiner Biegungsfestigkeit. In Fig. 48e suchen die Kräfte den Stab zu verdrehen; er widersteht mit seiner Torsionsfestigkeit. In Fig. 48f endlich wirken die Kräfte wie in Fig. 48b am Stabe, derselbe vermag sich aber unter dem Einflusse dieser Kräfte seitlich auszubiegen; er widersteht mit seiner Knickfestigkeit.

Fig. 48a—f.



Außer diesen Bezeichnungen gebraucht man zuweilen andere. So wird die Zugfestigkeit absolute, die Druckfestigkeit rückwirkende und die Biegungsfestigkeit relative Festigkeit genannt. Diese Bezeichnungen sind aber nicht sehr glücklich und etwas veraltet. Die Schubfestigkeit heißt auch Nietfestigkeit, weil gerade die Nieten vorwiegend auf Schub beansprucht werden. Aus gleichem Grunde bezeichnet man die Torsionsfestigkeit als Wellen- und die Knickfestigkeit als Säulenfestigkeit.

207. In allen diesen Fällen erleidet der Körper unter dem Einflusse der ihn beanspruchenden äußeren Kräfte eine Formänderung

im Sinne der Kräfte. Gewöhnlich ist dieselbe aber so gering, daß sie kaum wahrnehmbar bleibt und den Körper bei allen übrigen Betrachtungen als einen starren anzusehen gestattet. Nur zur Lösung der Aufgaben der Festigkeitslehre muß eine genaue Besprechung dieser kleinen Formänderungen erfolgen.

Wir betrachten zunächst die Beanspruchung des Stabes auf Zug und nehmen dabei an, daß der Stab überall denselben Querschnitt von der Fläche f habe, während die Stablänge mit l bezeichnet wird. Die Erfahrung lehrt, daß die Längenänderung Δl, welche der Stab unter dem Einflusse der Kräfte P erfährt, aus der Formel

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{P}{f} \cdot l$$

berechnet werden kann. Die Größe E hängt nur von dem Materiale des Stabes (und den gewählten Maßeinheiten) ab. Sie läßt sich nur durch Versuche bestimmen und wird der Elastizitätsmodul des betreffenden Materials genannt.

Das durch die Formel ausgesprochene Gesetz wird das Elastizitätsgesetz genannt. Es enthält die folgenden Aussagen in sich:

Die Längenänderung eines gegebenen Stabes ist proportional der ziehenden Kraft;

sie ist bei gleicher Belastung der ursprünglichen Länge direkt und der Querschnittsfläche umgekehrt proportional;

Stäbe aus demselben Materiale und von gleicher Länge erfahren gleiche Längenänderungen, wenn der Quotient $\frac{P}{f}$ für beide denselben Wert besitzt.

208. Das Elastizitätsgesetz bleibt nur so lange giltig, als der Quotient $\frac{P}{f}$ unter einem gewissen Werte bleibt, den man als die Elastizitätsgrenze des Materials bezeichnet. Da das elastische Verhalten des Stabes nicht unmittelbar von der ganzen Zugspannung P, in welche er versetzt wird, sondern von dem Werte des Quotienten $\frac{P}{f}$ abhängt, hat man diesem einen besonderen Namen

gegeben. Man nennt ihn die spezifische Spannung, auch wohl kurzweg die Spannung des Stabes. Es soll dafür stets der Buchstabe s gesetzt werden, so daß also

$$s = \frac{P}{f}$$

ist. Unter Benutzung dieser abkürzenden Bezeichnung läßt sich das Elastizitätsgesetz auch in der Form anschreiben

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{s}{E}$$

oder „die Längenänderung verhält sich zur Länge des Stabes, wie die spezifische Spannung zum Elastizitätsmodul des Materials".

Man erkennt aus dieser Form des Gesetzes deutlich die mechanische Bedeutung des Elastizitätsmoduls. Der Elastizitätsmodul ist nämlich diejenige spezifische Spannung, unter deren Einfluß sich der Stab auf das Doppelte verlängern würde, wenn sich der Giltigkeitsbereich des Elastizitätsgesetzes so weit erstreckte.

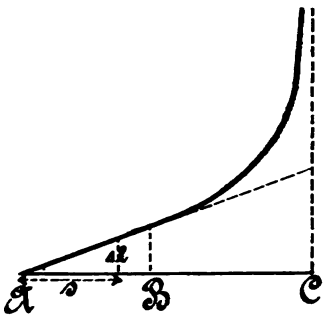
209. So lange die spezifische Spannung unter der Elastizitätsgrenze bleibt, also innerhalb des Giltigkeitsbereiches des Elastizitätsgesetzes, ist die Längenänderung des Stabes eine rein elastische, d. h. sie verschwindet vollständig wieder, wenn man die Kräfte P entfernt.

Bei einer Belastung des Stabes über die Elastizitätsgrenze hinaus wird die Formänderung größer, als die aus den oben angegebenen Formeln berechnete; die Formänderung wächst rascher als die Belastung. Nach der Entfernung der Belastung nimmt der Stab nicht wieder genau die frühere Länge an, er hat vielmehr eine bleibende Längenänderung erfahren. Bei noch weiterer Vermehrung der Belastung tritt schließlich der Bruch ein. Der Wert von s, bei welchem der Bruch erfolgt, wird die spezifische Bruchbelastung genannt.

Das Verhalten des Stabes bei verschiedenen Belastungen läßt sich durch ein Diagramm (Fig. 49) zur Darstellung bringen. Die spezifischen Spannungen trage man in irgend einem Maßstabe auf der Geraden AC von A aus ab und errichte in jedem Punkte eine Senkrechte, welche in Bezug auf einen zweiten Maßstab die

zugehörige Längenänderung angiebt. Man erhält hierdurch eine Linie, welche zunächst aus einer Geraden (so lange nämlich s unterhalb der Elastizitätsgrenze AB bleibt) und dann aus einer sich berührend anschließenden Kurve besteht. Ist AC die spezifische Bruchbelastung, so schließt sich die Kurve ungefähr asymptotisch an die durch C gezogene Senkrechte an. Der gerade Teil der Linie geht in der Verlängerung durch einen Punkt, dessen Abscisse den Elastizitätsmodul und dessen Ordinate die ursprüngliche Stablänge in dem bezüglichen Maßstabe zur Darstellung bringt.

Fig. 49.



210. Der Bruch des Stabes kann nicht nur dadurch herbeigeführt werden, daß man ihn sofort der spezifischen Bruchbelastung aussetzt. Aus den Versuchen Wöhlers geht vielmehr hervor, daß schon eine viel kleinere spezifische Spannung, wenn sie nur oberhalb der Elastizitätsgrenze liegt, nach längerer Zeit den Bruch verursachen kann, wenn die Last abwechselnd entfernt und wieder aufgebracht wird. Je näher diese Spannung der spezifischen Bruchbelastung liegt, desto kleiner ist die Zahl der Spannungswechsel, nach deren Wiederholung der Bruch eintritt. Bleibt die spezifische Spannung erheblich kleiner als die Bruchbelastung, so tritt der Bruch oft erst nach vielen Millionen Wiederholungen ein.

Für die Anwendungen ergiebt sich hieraus, daß solche Konstruktionsteile, deren Bruch unbedingt vermieden werden muß, niemals Beanspruchungen über die Elastizitätsgrenze hinaus ausgesetzt werden dürfen. Um eine angemessene Sicherheit zu erhalten, giebt man den Metallstäben in der Regel solche Abmessungen, daß die in ihnen auftretenden Spannungen nur die Hälfte der Elastizitätsgrenze erreichen. (Bei Stabeisen liegt die Elastizitätsgrenze bei 1400 kgr pro qcm, die zulässige spezifische Spannung beträgt daher 700 kgr pro qcm.)

Anm. Ein in Zugspannung versetzter Stab erfährt nicht nur eine Ausdehnung in der Längsrichtung, sondern gleichzeitig eine Querkontraktion,

also eine Verkürzung in jeder Querrichtung. Die prozentuale Querkontraktion beträgt ungefähr $^1/_4$ bis $^1/_3$ der prozentualen Längenausdehnung. In der elementaren Festigkeitslehre braucht aber hierauf keine Rücksicht genommen zu werden.

Aufg. 108. Eine schmiedeeiserne Zugstange (von kreisförmigem Querschnitt) hat 3 cm Stärke (darunter versteht man den Durchmesser des Querschnittskreises) und 4 m Länge. Wie groß ist ihre Längenänderung bei einer Belastung von 5000 kgr, wenn der Elastizitätsmodul = 2 000 000 kgr pro qcm ist?

Aufg. 109. Wie groß ist die Spannung eines Riemens von 8 cm Breite, 3 mm Stärke und 6 m Länge, wenn er gezwungen wird, sich um 1 cm zu strecken und wenn der Elastizitätsmodul = 1800 kgr pro qcm ist?

Aufg. 110. Eine vorher spannungslose Eisenstange von beliebigem Querschnitt und beliebiger Länge wird an ihren Enden festgehalten und hierauf um 30° C. abgekühlt. Wie groß ist die spezifische Zugspannung, welche sie erfährt, wenn der Ausdehnungscoeffizient des Schmiedeeisens $^1/_{80000}$ für 1° C. ist?

211. Die Belastung eines Stabes durch Druck (Fig. 48b) bringt eine elastische Verkürzung desselben hervor, welche gleichfalls nach der in § 207 angegebenen Formel berechnet werden kann. Auch im übrigen gilt alles für die Zugbelastung Gesagte unverändert, sobald nur der Stab verhindert ist, sich seitlich auszubiegen (Fig. 48f). Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß bei allen Konstruktionsmaterialien der Elastizitätsmodul für Druck genau gleich demjenigen für Zug ist.

212. Die elastische Formänderung eines auf Schub belasteten Stabes ist in den meisten Fällen weit komplizierter, schon deshalb, weil dieselbe gleichzeitig mit einer Beanspruchung auf Druck und auch auf Biegung und den hierdurch verursachten Formänderungen verbunden ist. Denkt man sich im Materiale des Stabes eine Gerade parallel zur Stabachse und eine dazu Senkrechte in der Richtung der Kraft P gezogen, so ändert sich infolge der Belastung der Winkel zwischen beiden und es tritt hierdurch eine gegenseitige Verschiebung zweier benachbarter Querschnitte ein. Heißt der Abstand der Querschnitte l und die Verschiebung Δl, so gilt wieder die frühere Formel. Der Wert, den man für E in dieselbe einzuführen hat, ist aber von dem früheren verschieden. Er wird der

Elastizitätsmodul für Schub genannt und beträgt ungefähr $^3/_8$ desjenigen für Zug und Druck.

Aufg. 111. Um wieviel ändert sich der ursprünglich rechte Winkel zwischen den beiden oben genannten Linien in einem Schmiedeisenstabe für eine spezifische Schubbelastung von 500 kgr pro qcm, wenn der Schubelastizitätsmodul = 750 000 kgr pro qcm ist?

Anl. z. L. Das Verhältnis $\frac{\Delta l}{l}$, das nach § 208 berechnet werden kann, giebt die trigonometrische Tangente der gesuchten Winkeländerung an.

213. Auch für die Beanspruchung auf Biegung und Torsion gilt der Satz, daß die Formänderung proportional zur Belastung ist, so lange keine bleibenden Formänderungen auftreten. Dagegen gilt dies nicht mehr für die Beanspruchung auf Zerknicken. Alle drei Fälle sind indessen weniger einfacher Art als die vorher behandelten und es wird sich in der Folge zeigen, daß sie sich auf die früheren zurückführen lassen.

Zweites Kapitel.

Zug-, Druck- und Schubfestigkeit.

214. Die Berechnung eines Stabes auf Zugfestigkeit stützt sich auf die schon in § 208 vorkommende Gleichung

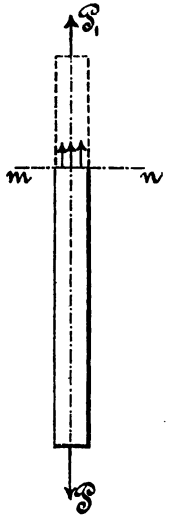
$$s = \frac{P}{f}.$$

Soll z. B. eine Zugstange eine gegebene Kraft übertragen, so kennt man außer P auch die zulässige Spannung s des Materials und kann die erforderliche Querschnittsfläche berechnen.

Bei der Anwendung dieser Gleichung macht man stillschweigend die Voraussetzung, daß sich die inneren Kräfte gleichförmig über den ganzen Querschnitt verteilen. In den gewöhnlich vorkommenden Fällen wird dies auch genau genug zutreffen und zwar immer dann, wenn alle Fasern, in die man sich den Stab parallel zur Achse zerlegt denken kann, die gleiche Verlängerung erfahren (§ 207). Dies setzt voraus, daß die Belastung centrisch auf den Stab einwirkt.

Denkt man sich nämlich den Stab durch irgend eine Querschnittsfläche *mn* (Fig. 50) in zwei Teile getrennt, so muß der in der Figur durch ausgezogene Linien angegebene Teil des Stabes immer noch im Gleichgewichte bleiben, wenn man sich die in der Querschnittsfläche *mn* übertragenen inneren Kräfte durch gleich große äußere ersetzt denkt. Bei gleichförmiger Verteilung der Spannungen geht die Resultierende aller Zugspannungen durch den Schwerpunkt des Querschnittes (§ 128). Das Gleichgewicht dieser Resultierenden mit der Kraft P erfordert aber, daß beide in dieselbe Richtungslinie fallen (§ 118). Eine gleichförmige Verteilung der Spannungen kann daher nur dann eintreten, wenn die Richtungslinie der Kraft P durch den Schwerpunkt jedes Querschnittes geht.

Fig. 50.



In den Konstruktionen ordnet man die Stäbe, wenn irgend möglich stets so an, daß diese Bedingung erfüllt ist und kann dann die obenstehende Formel zur Berechnung benützen. Bei excentrischer Belastung bleibt sie aber nicht mehr giltig und muß durch die in § 222 abgeleitete ersetzt werden.

215. Für die Druckbelastung behalten alle diese Bemerkungen unveränderte Giltigkeit. Auch die Berechnung der auf Schub beanspruchten Stäbe wird in der Regel auf Grund der vorstehenden Formel durchgeführt, obschon mit geringerem Rechte. Eine gleichförmige Verteilung der Schubspannungen über den ganzen Querschnitt läßt sich nämlich in den meisten Fällen kaum erwarten. Da aber bei der auf Grund der Erfahrung anzugebenden zulässigen Schubspannung schon auf diesen Umstand Rücksicht genommen ist, steht der Anwendung der Formel auf die in der Praxis vorkommenden Fälle nichts im Wege.

Aufg. 112. Wie stark muß eine cylindrische schmiedeeiserne Zugstange gemacht werden, wenn sie eine Belastung von 8000 kgr tragen soll?

Aufg. 113. Wie groß ist die zulässige Spannung eines Telegraphendrahtes von 4 mm Stärke, wenn die spezifische Spannung wegen

der besseren Qualität des zu Draht verarbeiteten Eisens 1200 kgr pro qcm betragen darf?

Aufg. 114. Für Hanfseile ist in einem Handbuche der Maschinenkonstruktionslehre die Formel $d = 1{,}2\sqrt{P}$ angegeben (d Durchmesser in mm, P Kraft in kgr). Wie groß ist die zu Grunde gelegte zulässige Beanspruchung?

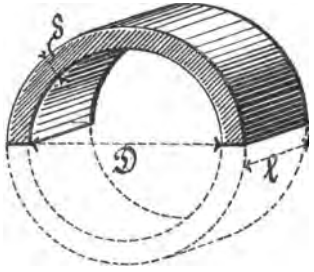
Aufg. 115. Die Reißlänge einer Papiersorte beträgt 1200 m; wie groß ist die spezifische Bruchbelastung, wenn das spezifische Gewicht = 1,2 ist?

Aufg. 116. Eine dem Zerknicken nicht ausgesetzte gußeiserne Säule soll eine Last von 20 000 kgr tragen. Wie groß muß der äußere Durchmesser des ringförmigen Querschnittes sein, wenn die Wandstärke (mit Rücksicht auf die Ausführung des Gusses) 20 mm beträgt? (Spezifisch zulässige Beanspruchung des Gußeisens auf Druck = 700 kgr pro qcm.) Ferner, wie groß muß die quadratische Grundplatte der Säule gemacht werden, wenn sie auf einen Granitquader gestellt werden soll, dessen zulässige Beanspruchung 50 kgr pro qcm beträgt?

Aufg. 117. Wie hoch darf ein Turm gemauert werden, wenn er überall denselben Querschnitt erhalten soll und die zulässige Druckbeanspruchung des Mauerwerks (Ziegel) 10 kgr, das spezif. Gewicht desselben 2,1 beträgt? Dasselbe für eine Pyramide, wenn die Seite der quadratischen Basis die Hälfte der Höhe ausmacht.

216. Eine unter innerem Drucke stehende Röhre wird vorwiegend auf einfache Zugfestigkeit beansprucht. Unter dem Einflusse des inneren Druckes erfährt nämlich der Radius eine elastische Vergrößerung und in demselben Verhältnisse vergrößert sich auch jedes Bogenelement des Umfangs. Ist die Wandstärke δ groß im Vergleiche zum inneren Durchmesser D, so macht die Ausdehnung der äußeren Schichten einen kleineren Bruchteil des Umfangs aus als bei den inneren Schichten, und zwar aus zwei Gründen. Einmal vergrößert sich nämlich der äußere Radius nicht so viel als der innere, weil unter dem Einflusse des Druckes auch die Wandstärke δ eine elastische Verkleinerung erfährt und dann macht auch selbst eine elastische Verlängerung

Fig. 51.



von gleichem Betrage einen geringeren Bruchteil des äußeren Radius als des inneren aus.

Bleibt δ klein, so sind diese Unterschiede zu vernachlässigen und man kann näherungsweise eine gleichförmige Verteilung der Zugspannungen über den Längsschnitt der Rohrwand voraussetzen.

Gewöhnlich ist der Druck in der Röhre in Atmosphären gegeben. Wir betrachten das Gleichgewicht des in Fig. 51 gezeichneten Körpers, d. h. einer Rohrhälfte von der Länge l mit Einschluß der dazu gehörigen Flüssigkeit. Dieser Körper wird nach unten durch ein Rechteck begrenzt, das in der Mitte die Flüssigkeit und in schmalen Streifen zu beiden Seiten die Rohrwand abschließt. Auf den Halbkreisflächen, welche den Körper nach vorn und hinten begrenzen, werden nur Kräfte parallel zur Rohrachse übertragen, während auf die halbcylindrische Rückwand keine äußeren Kräfte wirken.

Der Komponentensatz liefert beim Projizieren auf die zur Ebene des Längsschnittes senkrechte Richtung die Gleichgewichtsbedingung

$$s \cdot 2\delta l = p \cdot Dl,$$

wenn p den Druck in Atmosphären (zu $1\,^{kgr}$ pro qcm gerechnet) angiebt und die Längen auf cm bezogen werden.

Hieraus folgt

$$s = p \cdot \frac{D}{2\delta}.$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich die folgenden Aufgaben lösen.

Aufg. 118. Wie stark muß die Wand eines cylindrischen Dampfkessels von $1{,}10\,^{m}$ Durchmesser für 10 Atmosphären Überdruck gemacht werden?

Anm. Wegen der an der Naht eintretenden Schwächung sowie mit Rücksicht auf die Abnützung muß das Kesselblech stärker genommen werden, als es sich aus dieser Rechnung unmittelbar ergiebt.

Aufg. 119. Wie groß muß die Wandstärke eines gußeisernen Wasserleitungsrohres von $40\,^{cm}$ lichtem Durchmesser und für 20 Atmosphären Druck sein? (Zulässige Beanspruchung des Gußeisens auf Zug $250\,^{kgr}$ pro qcm.)

Aufg. 120. Wie groß muß mindestens die Wandstärke eines Geschützrohres von $15\,^{cm}$ Kaliber gemacht werden? (Zulässige Be-

anspruchung des Gußstahls 3000 kgr pro qcm, größter Druck der Pulvergase circa 3000 Atmosphären.) Vgl. § 224.

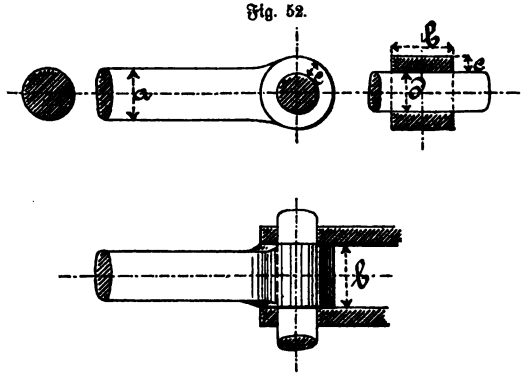
217. Weicht der Rohrquerschnitt von der Kreisform ab, so treten neben den nach der früheren Formel zu berechnenden Zugspannungen noch solche wegen der Verbiegung der Rohrwand auf. Auf elementarem Wege lassen sich dieselben nicht ermitteln. In der Praxis wird man solche Formen zu vermeiden suchen.

Röhren unter äußerem Drucke lassen sich, wenn sie kreisförmigen Querschnitt haben, in derselben Weise berechnen. Nur darf die Wandstärke hier nicht zu klein werden, damit ein seitliches Ausknicken der Rohrwand vermieden wird.

218. Bei den Konstruktionen kommt es häufig vor, daß entweder derselbe Körper oder mehrere mit einander verbundene Körper gleichzeitig Zug-, Druck- und Schubspannungen auszuhalten haben. Man muß dann die Abmessungen so wählen, daß gegen jede Bruchgefahr die gleiche Sicherheit besteht. Eine ganze Anzahl von Regeln über die vorteilhafteste Gestalt der Maschinenteile oder der Verbindungsteile in den Baukonstruktionen geht aus diesem Bestreben hervor, Körper von gleicher Festigkeit zu konstruieren.

Wir betrachten als Beispiel für eine derartige Berechnung einen gewöhnlichen Stangenkopf (Fig. 52). An demselben kommen vier wichtige Dimensionen vor, die Stärke a der cylindrischen Zugstange, zu welcher er gehört, der Durchmesser d des Auges, d. h. die Stärke des die Verbindung vermittelnden Bolzens, die Wandstärke c und die Breite b. Die Kraft, welche die Zugstange übertragen soll, wird, wie gewöhnlich, mit P bezeichnet. Außerdem sollen $k_I k_{II} k_{III}$ die zulässigen spezif. Spannungen für Zug, Druck und Schub bedeuten.

Fig. 52.



Dann ist

$$1)\ P = \frac{a^2}{4}\pi \cdot k_{\text{I}}; \qquad 2)\ P = 2bc \cdot k_{\text{I}}; \qquad 3)\ P = 2 \cdot \frac{d^2}{4}\pi \cdot k_{\text{III}};$$

$$4)\ P = \frac{\pi d}{4} \cdot b \cdot k_{\text{II}}.$$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus, daß der Querschnitt der Zugstange zur Übertragung der Kraft P hinreichen soll; die zweite spricht aus, daß ein Ausreißen der um das Auge liegenden Wand vermieden werden muß. Die dritte giebt die Bedingung dafür an, daß der Bruch nicht durch Abscheren des Bolzens eintreten kann und die vierte bezieht sich auf den Druck zwischen dem Bolzen und der Innenwand des Auges. (Vgl. § 219.)

Die vier Gleichungen reichen zur Ermittelung der vier Unbekannten a, b, c, d gerade hin. Man behandelt sie gewöhnlich aber in solcher Weise, daß P herausfällt und die übrigen Dimensionen in a ausgedrückt werden.

Man erhält so für Schmiedeeisen ($k_{\text{I}} = k_{\text{II}} = 700$ kgr; $k_{\text{III}} = 525$ kgr pro qcm)

$$b = a\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1{,}22\,a; \quad c = \frac{a\pi}{8}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}32\,a; \quad d = a\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}82\,a.$$

Diese Formeln gelten für jeden schmiedeeisernen Stangenkopf, ohne Rücksicht auf die Größe der Kraft P. Man nennt die Größe a, in welcher alle übrigen ausgedrückt sind, die Bezugseinheit. Nachdem die anderen Dimensionen ein für alle Mal in der Bezugseinheit ausgedrückt sind, hat man im einzelnen Falle nur noch (aus Gl. 1) den Wert von a zu berechnen, um sofort den Stangenkopf in richtiger Größe und in richtigem Verhältnisse zeichnen zu können.

219. Die oben angeschriebenen Gleichungen bedürfen noch einiger Erläuterungen. In Gl. 2) ist angenommen, daß sich die Zugspannungen gleichförmig über beide Rechtecke verteilen, welche zusammen den Querschnitt durch den Stangenkopf bilden. Daß beide Rechtecke in gleicher Weise zur Übertragung der Kraft beitragen, ergiebt sich schon aus Gründen der Symmetrie. In Wirklichkeit werden freilich die nach innen gelegenen Teile jedes Rechtecks eine etwas größere Spannung auszuhalten haben, als die

weiter von der Achse entfernten (vgl. § 216). Man kann dem dadurch Rechnung tragen, daß man c noch etwas vergrößert.

Bei Gl. 3) ist vorausgesetzt, daß die Stange vermittelst des Bolzens an zwei symmetrisch gelegene Platten befestigt ist. Im Falle des Abscherens würde der Bolzen in drei Stücke zerfallen und es würden zwei Bruchflächen entstehen, über welche sich die Scherspannungen verteilen. Man nennt einen Bolzen dieser Art (nach der Zahl der Bruchflächen) einen *zweischnittigen Bolzen*.

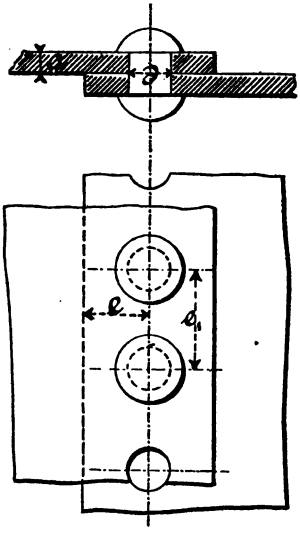
Bei Aufstellung der Gl. (4) ist ferner zu beachten, daß der Druck zwischen Bolzen und Lochwand sich auf einer Halbcylinderfläche überträgt. Diese Druckverteilung ist aber keineswegs gleichförmig. Es ergiebt sich schon aus einer oberflächlichen Betrachtung der elastischen Formänderung, daß die spezifische Druckspannung ihren größten Wert an der auf der Stabachse liegenden Stelle annimmt und daß dieselbe gegen die Ränder des Halbcylinders hin bis auf Null abnimmt. *Eine genauere Untersuchung, welche sich auf elementarem Wege nicht durchführen läßt, ergiebt, daß in solchen Fällen die spezifische Druckspannung in der Mitte doppelt so groß wird, als wenn sich der Druck gleichförmig über den ganzen Halbcylinder verteilt.* Da auch dieser größte Wert des auftretenden Druckes den zulässigen nicht übersteigen darf, ist in Gl. (4) zur Berücksichtigung des erwähnten Umstandes so gerechnet, als wenn sich der Druck nur über ein Viertel des Lochcylinders gleichförmig verteilte.

220. Auch für die gewöhnliche Nietverbindung (Fig. 53) läßt sich eine ähnliche Betrachtung durchführen, aus welcher sich der Durchmesser d des Nietbolzens, die Entfernung e des Nietmittels vom Blechrande und der Abstand e_1 zweier Nietmittel in der Blechstärke a als Bezugseinheit ausdrücken lassen. Der Bruch kann auch hier auf vier verschiedene Arten eintreten, nämlich 1) durch Ausreißen des Bleches zwischen je zwei Nieten, 2) durch Abscheren des Blechrandes, 3) durch Abscheren des Bolzens, der hier einschnittig ist, 4) durch Zerdrücken des Materials an der Berührungsstelle zwischen Lochwand und Bolzenumfang.

Die sich hierbei ergebenden Formeln entsprechen freilich nicht völlig den bei der konstruktiven Ausführung gewöhnlich zu Grunde

gelegten; es liegt dies daran, daß auch noch eine starke Reibung zwischen den Blechen auftritt, da diese nach dem Abkühlen der warm vernieteten Bolzen stark aufeinander gepreßt sind. Hierdurch wird die Verteilung der inneren Kräfte erheblich geändert und läßt sich nicht mehr scharf rechnungsmäßig verfolgen. Die in der Konstruktionslehre für die Nietverbindungen angegebenen Formeln sind daher aus Versuchen über die Festigkeit ausgeführter Nietungen hervorgegangen.

Fig. 53.



Aufg. 121. Wie hoch muß der Kopf einer Verbindungsschraube mindestens gemacht werden, damit sich gleiche Sicherheit gegen Abscheren desselben wie gegen Zerreißen des Schraubenschaftes ergiebt?

Aufg. 122. Wie hoch muß die Mutter einer flachgängigen Schraube und wie groß muß die Ganghöhe (d. i. das Doppelte der Gangtiefe) gemacht werden, damit die Schraube ein Körper gleicher Festigkeit sei?

221. Zuweilen beabsichtigt man, den Zusammenhang eines Körpers durch die an ihm angreifenden Kräfte wirklich zu zerstören, z. B. bei Scheren, Stanzmaschinen, Ziehbänken, Drehbänken u. s. w. Man verlangt dann die Berechnung der an dem Körper anzubringenden Bruchlast. Dieselbe erfolgt im allgemeinen ebenso wie die Berechnung der zulässigen Last, wobei nur in die Formeln an die Stelle der zulässigen die Bruchspannung einzuführen ist.

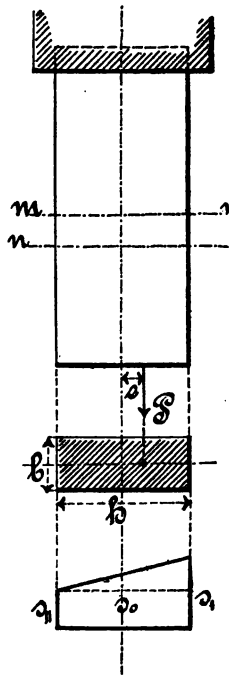
Für die Kraft, welche erforderlich ist, um von einem Körper einen Span von gegebener Dicke und Breite abzutrennen, werden in der Lehre von den Werkzeugmaschinen besondere Formeln angegeben, welche aus der Erfahrung hervorgegangen sind und auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Aufg. 123. Wie groß ist die Kraft, welche man aufwenden muß, um aus einem Bleche von 8 mm Stärke ein kreisrundes Loch von 18 mm Durchmesser auszustanzen? (Bruchbelastung auf Schub = 2400 kgr pro qcm.)

222. Excentrische Zug- oder Druckbelastung. Es sei hier vorausgesetzt, daß der Stab rechteckigen Querschnitt und daher zwei Symmetrieebenen besitze, in deren einer die Richtungslinie der Kraft P liegt. Es ist das der in den Anwendungen gewöhnlich vorkommende Fall; für kompliziertere Fälle ist auf § 243 zu verweisen.

Die Behandlung der Aufgabe wird ermöglicht durch eine zuerst von Navier (geb. 1785, gest. 1836) aufgestellte Annahme, welche sich seitdem als hinreichend genau richtig für alle praktischen Fälle bewährt hat. Sie soll, da sie kein streng giltiges Naturgesetz angiebt, sondern nur annäherungsweise zutrifft, die Navier'sche Regel genannt werden.

Fig. 54a.



Die Navier'sche Regel sagt aus, daß bei der excentrischen Zug- oder Druckbelastung eines Stabes alle Punkte, welche vorher auf einem Querschnitte lagen, auch nach der elastischen Formänderung noch in einer Ebene liegen.

Zwei auf der Ansichtsfläche (Fig. 54a) des Stabes senkrecht zur Achse gezogene Linien mm und nn bleiben nach der elastischen Formänderung nicht parallel zu einander; sie schließen ein Trapez zwischen sich ein. Denn schon aus der in § 214 durchgeführten Betrachtung geht hervor, daß die auf der Seite der Kraft P liegenden Fasern stärker gespannt sind und sich daher mehr verlängern, als die jenseitig gelegenen.

Nach dem Elastizitätsgesetze (§ 208) sind aber die spezifischen Spannungen proportional den Verlängerungen. Das Diagramm der Spannungsverteilung über den Querschnitt (Fig. 54c) bildet daher ebenfalls ein Trapez. In der äußersten Faser nach rechts tritt die größte spezifische Spannung s_{I}, in der nach links gelegenen die kleinste s_{II} ein.

Um die Spannungen s_I und s_II zu berechnen denken wir uns den Stab längs des Querschnittes nn durchschnitten und an der Schnittfläche äußere Kräfte angebracht von derselben Größe und Verteilung, wie die spezifischen Spannungen s. Diese müssen am unteren Teile des Stabes mit der Kraft P im Gleichgewichte stehen. Dazu gehört erstens, daß ihre Summe gleich P ist und zweitens, daß die Richtungslinie ihrer Resultierenden mit der Richtungslinie von P zusammenfällt.

Die erste Bedingung liefert die Gleichung (vgl. den Querschnitt Fig. 54[b])

$$\frac{s_\mathrm{I} + s_\mathrm{II}}{2} \cdot bh = P \quad \text{oder} \quad s_0 = \frac{P}{bh}.$$

Die Spannung der achsialen Faser ist daher genau so groß, wie bei centrischer Belastung des Stabes.

Um die zweite Bedingung durch eine Gleichung auszusprechen ziehe man im Spannungsdiagramme die in Fig. 53[c] punktiert angegebene horizontale Linie. Jede Spannung wird hierdurch in die Minimalspannung s_II und einen darüber hinaus gehenden Teil zerlegt. Die Resultierende aller Spannungen s_II, welche sich gleichförmig über den Querschnitt verteilen, hat die Größe bhs_II und fällt der Richtung nach mit der Stabachse zusammen. Die darüber hinausgehenden Spannungen werden im Diagramm durch ein rechtwinkliges Dreieck zur Darstellung gebracht. Die Aufgabe, die Richtungslinie der Resultierenden derselben zu finden, fällt zusammen mit der Aufgabe, die Schwerlinie des Dreiecks zu bestimmen. Diese hat aber den Abstand $\frac{1}{3}h$ von der Stabachse (§ 131). Die Größe der Resultierenden ist $\frac{1}{2}(s_\mathrm{I} - s_\mathrm{II})bh$.

Alle Spannungen sind jetzt durch zwei Kräfte ersetzt, die mit P im Gleichgewichte stehen müssen. Legt man den Momentenpunkt auf die Stabachse, so erhält man nach dem dritten Hauptlehrsatze die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(s_\mathrm{I} - s_\mathrm{II})bh \cdot \frac{h}{6} = P.l.$$

Durch Auflösen der beiden gefundenen Gleichungen nach den Unbekannten s_I und s_II erhält man

$$s_\mathrm{I} = P\frac{h+6e}{bh^2}; \quad s_\mathrm{II} = P\frac{h-6e}{bh^2}.$$

223. Für $e = 0$ ist die Belastung centrisch, s_{I} wird gleich s_{II} und ebenso groß als es früher für diesen Fall gefunden wurde.

Die Spannung s_{II} verschwindet, wenn $e = \frac{h}{6}$ ist. Das Diagramm der Spannungen geht dann in ein rechtwinkliges Dreieck über und die größte Spannung s_{I} wird gerade doppelt so groß als bei centrischer Belastung.

Wird e noch größer, so wechselt s_{II} das Vorzeichen; es treten Druckspannungen in den nach links gelegenen Fasern auf. Eine Wiederholung der vorigen Betrachtung zeigt, daß die Formeln des vorigen § auch in diesem Falle noch giltig bleiben, wenn man eine Druckspannung als eine negative Zugspannung ansieht.

Man verlangt häufig, daß das Auftreten von Spannungen verschiedenen Vorzeichens bei excentrischer Belastung eines Stabes unbedingt vermieden wird. Die Richtungslinie von P darf dann nur innerhalb des mittleren Drittels der Stabdimension h angreifen. Derjenige Teil des Stabquerschnittes, in welchem der Angriffspunkt der Kraft P hiernach liegen darf, wird der Kern des Querschnittes genannt. Der Querschnittskern eines rechteckigen Stabquerschnittes erstreckt sich demnach über das mittlere Drittel jeder Symmetrieachse.

Alle diese Betrachtungen gelten für excentrische Druckbelastung ohne jede Änderung. Sie sind von besonderer Wichtigkeit für die Berechnung der Mauerkonstruktionen. Mauerwerk ist nämlich gegen Zugspannungen nur sehr wenig widerstandsfähig und darf daher nur auf Druck in Anspruch genommen werden. Aus dem oben Gesagten ergiebt sich, daß die Resultierende der äußeren Belastungen auf die Fuge eines Mauerkörpers immer innerhalb des mittleren Fugendrittels bleiben muß.

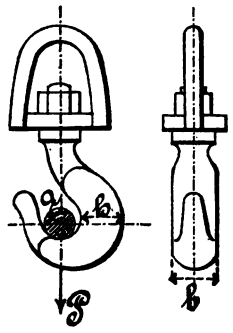
Aufg. 124. Eine Mauer von senkrechter Vorderfläche, 1 m Kronenbreite und im Verhältnis 1 : 10 geneigter Hinterfläche hat nur ihr eigenes Gewicht zu tragen. Wie groß wird a) die größte Kantenpressung, wenn das spezifische Gewicht = 2,4 und die Höhe 8 m beträgt; b) wie hoch darf die Mauer werden, wenn eine Kantenpressung von 10 kgr zulässig ist?

Aufg. 125. Ein Haken (Fig. 55) ist bestimmt eine Last P, die an einer Kette hängt, aufzunehmen. Wenn $b = 1{,}2\,a$ gemacht

werden soll, wo a die Stärke des Kettengliedes ist, wie groß muß h sein?

Anl. z. L. Man drücke zunächst P in a aus, wobei zu beachten ist, daß der Querschnitt des auf Zug beanspruchten Kettengliedes aus zwei Kreisen vom Durchmesser a besteht. Man wende dann die oben für s_1 abgeleitete Formel auf den Haken an und setze darin $e = \frac{a+h}{2}$, s_1 aber gleich der zulässigen Spannung des Schmiedeeisens.

Fig. 55.



224. Hat eine unter einem Drucke stehende Röhre (§ 216) eine beträchtliche Wandstärke, so ist aus den früher angegebenen Gründen die Spannung der äußeren Ringschichten kleiner als diejenige der inneren. Vernachlässigt man hierbei die elastische Verkürzung der Wandstärke δ, so läßt sich das Diagramm der Spannungsverteilung leicht konstruieren. Es wird nach oben durch eine krumme Linie (Hyperbel) begrenzt und kann näherungsweise als ein Trapez angesehen werden.

Aufg. 126. Wie groß ist die Wandstärke des gußeisernen Cylinders einer hydraulischen Presse zu machen, wenn der Druck bis auf 100 Atmosphären gesteigert werden soll und der lichte Durchmesser 20 cm beträgt?

Anl. z. L. Die innere Ringspannung muß gleich 250 kgr pro qcm (d. i. die zulässige Zugspannung des Gußeisens) werden. Die äußere ist im Verhältnis $D:(D+2\delta)$ kleiner. Sieht man das Spannungsdiagramm als ein Trapez an, so ergiebt sich daraus sofort die mittlere Ringspannung und durch Anwendung des Komponentensatzes wie in § 216 eine Gleichung, aus welcher sich δ berechnen läßt.

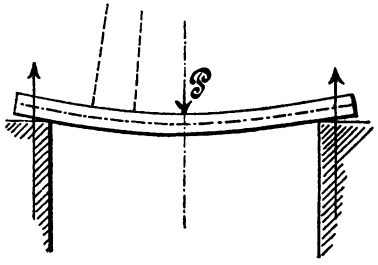
Drittes Kapitel.

Biegungsfestigkeit.

225. Wir betrachten zunächst einen Balken von rechteckigem Querschnitt, der beiderseits unterstützt ist und in der Mitte die Last P trägt (Fig. 56). Der Balken erleidet eine elastische Form-

änderung, welche in Übereinstimmung mit der Navier'schen Regel (§ 222) steht. Zieht man nämlich auf der Ansichtsfläche zwei gerade Linien parallel und senkrecht zur Stabachse, so wird jene bei der Formänderung gekrümmt, diese bleibt geradlinig und der Winkel zwischen beiden bleibt ein Rechter.

Fig. 56.

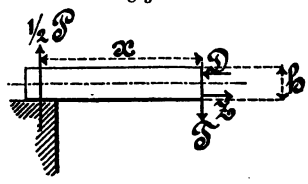


Von G. Kirchhoff (gest. 1887) ist der strenge Nachweis erbracht worden, daß ein vollkommen elastischer Stab in seinem Verhalten genau mit der Navier'schen Regel übereinstimmt, wenn die Querschnittsdimensionen sehr klein sind im Vergleiche zur Länge. — Bei sehr kurzen und dicken Stäben sind zwar erhebliche Abweichungen zu erwarten; die ausgedehnten und vielseitigen Erfahrungen in den technischen Anwendungen haben aber bisher auch in solchen Fällen keine Veranlassung gegeben, den aus der Navier'schen Regel gezogenen Folgerungen zu mißtrauen.

Daß der rechte Winkel zwischen den beiden auf der Ansichtsfläche gezogenen Linien sich nicht oder wenigstens nicht merklich ändert, hängt damit zusammen, daß Scherspannungen im gebogenen Balken nur in geringem Betrage auftreten (§ 212; vgl. auch § 232).

226. Aus der geometrischen Betrachtung des durchgebogenen Balkens kann man leicht auf die Verteilung der in ihm auftretenden inneren Kräfte schließen. Zwei senkrecht zur Stabachse gezogene Linien, welche vorher ein schmales Rechteck einschlossen, grenzen nach der Formänderung ein Trapez zwischen sich ab. Sie schneiden sich bei ihrer Verlängerung nach oben im Krümmungsmittelpunkte der gebogenen Stabmittellinie, die man auch die elastische Linie nennt. Die oberen Fasern sind kürzer geworden und erleiden Druckspannungen, die unteren sind verlängert und daher gezogen.

Fig. 57

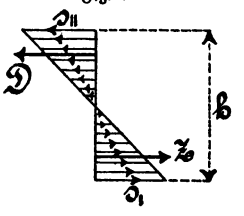


Betrachtet man denjenigen Teil des Balkens, welcher vom linken Auflager bis zu irgend einem Querschnitte reicht (Fig. 57), so zeigt sich, daß an diesem die über

den Querschnitt verteilten inneren Kräfte (welche nach Wegnahme des anderen Balkenteils durch gleich große äußere ersetzt zu denken sind) mit dem Auflagerdrucke $\frac{1}{2}P$ im Gleichgewichte stehen müssen. In Fig. 57 sind diese inneren Kräfte zu drei Resultierenden vereinigt gedacht, von denen T die Mittelkraft aller Schub-, D die aller Druck- und Z die aller Zugspannungen bedeutet.

Die Verteilung der Zug- und Druckspannungen über den Querschnitt zeigt das Spannungsdiagramm Fig. 58, in welchem der Deutlichkeit wegen die Balkenhöhe h in größerem Maßstabe aufgetragen ist. Es bildet ein verschränktes Trapez, weil die Spannungen proportional den Längenänderungen sind und weil der Elastizitätsmodul für Zug und Druck denselben Wert besitzt (§ 211). Diejenige Faser, welche bei der Biegung ihre ursprüngliche Länge behält und daher weder Zug- noch Druckspannungen aufnimmt, wird die neutrale Faser genannt. Die größte spezifische Druckspannung s_{II} erfährt die oberste, die größte Zugspannung s_I die unterste Faser.

Fig. 58.



Der Komponentensatz liefert bei seiner Anwendung auf das Gleichgewicht der Kräfte am linken Balkenteile die Gleichungen

$$T = \tfrac{1}{2}P; \quad D = Z.$$

Aus der letzten folgt, daß bei rechtwinkligem Querschnitte des Balkens $s_I = s_{II}$ ist, wenn man vom Vorzeichen absieht und daß die neutrale Faser in der halben Höhe des Balkens liegt.

Der durchschnittliche Wert der spezifischen Zugspannung in der unteren Querschnittshälfte ist $\frac{1}{2}s_I$. Da die Fläche, über welche sich Zugspannungen verteilen $= \frac{1}{2}bh$ ist (b die Breite des Querschnitts), so folgt

$$Z = \frac{bhs_I}{4}.$$

Die Richtungslinie der Resultierenden Z geht durch den Schwerpunkt des rechtwinkligen Dreiecks, welches den unteren Teil des Spannungsdiagramms bildet. Ihr Abstand von der Balkenmitte beträgt daher $\frac{1}{3}h$. Für D gilt dasselbe.

Zur Ermittelung von s_I wenden wir den Momentensatz an

und legen den Momentenpunkt in den zur Betrachtung ausgewählten Querschnitt auf die neutrale Faser. Das Moment von T verschwindet, Z und D haben negatives, der Auflagerdruck positives Moment. Wir erhalten die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} P.x = D.d + Z.z,$$

worin x, d, z die Hebelarme bedeuten. Durch Einsetzen der für Z, z, D, d bereits gefundenen Werte und durch Auflösen nach s_1 erhalten wir

$$s_1 = \frac{6 . \frac{1}{2} Px}{bh^2}.$$

227. Die vorstehende Betrachtung bleibt auch dann noch anwendbar, wenn der rechteckige Balken in beliebiger Weise mit senkrechten Lasten behaftet ist. Es tritt dann nur an die Stelle von $\frac{1}{2} Px$ in der Momentengleichung die Momentensumme aller am linken Balkenteile wirkenden äußeren Kräfte. Man nennt dieselbe das **Biegungsmoment** für den betreffenden Querschnitt und schreibt dafür gewöhnlich den Buchstaben M. Wir erhalten so die Gleichung

$$s_1 = \frac{6M}{bh^2}.$$

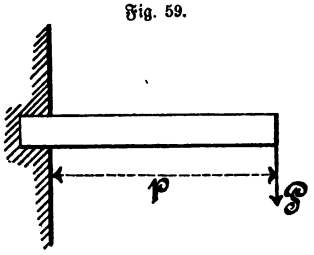
228. Die jetzt abgeleiteten Gleichungen gelten für jeden Querschnitt des Balkens. Um beurteilen zu können, ob ein Balken eine Last mit Sicherheit zu tragen vermag, muß man aber im stande sein, die größte an irgend einer Stelle auftretende Spannung zu berechnen. Denn es nützt nichts, daß der Balken an einer Stelle den Zusammenhang bewahrt, wenn er an einer anderen Stelle zerstört wird.

Den größten Wert nimmt s_1 (beziehungsweise s_{11}) dort an, wo das Biegungsmoment am größten ist; denn die übrigen in der Formel für s_1 vorkommenden Größen behalten an allen Stellen den gleichen Wert.

Trägt der Balken nur eine Last in der Mitte (Fig. 56), so nimmt im mittelsten Querschnitte M und daher s_1 seinen größten Wert an. Bei der Berechnung eines solchen Balkens muß daher x gleich der halben Spannweite gesetzt werden. In anderen Belastungsfällen bedarf es einer besonderen Überlegung, um die Stelle des **gefährdetsten Querschnittes** zu erkennen.

229. Besonders häufig kommt der in Fig. 59 zur Darstellung gebrachte Belastungsfall vor. Er weicht von dem früheren insbesondere darin ab, daß der gebogene Balken seine konvexe Seite nach oben kehrt und daß daher die oberen Fasern gezogen, die unteren gedrückt sind. Sonst bleibt aber alles Frühere giltig. Der gefährlichste Querschnitt liegt an der Einmauerungsstelle und für M ist hier Pp zu setzen.

Fig. 59.



Aufg. 127. Ein hölzerner Balken (zulässige Beanspruchung 60 kgr pro qcm) hat 20 cm Breite, 30 cm Höhe und 3 m Spannweite. Welche Last vermag er in der Mitte mit Sicherheit zu tragen?

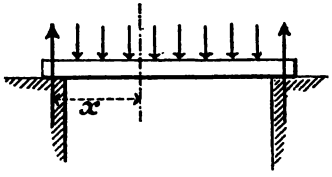
Aufg. 128. Welche Querschnittsdimensionen muß ein hölzerner Balken erhalten, wenn $\frac{b}{h} = \frac{4}{7}$, die Spannweite 2,4 m, die Last in der Mitte 6000 kgr ist und die zulässige Beanspruchung gleich 100 kgr pro qcm gewählt werden darf, weil der Balken nur vorübergehend einmal zur Aufnahme der Last dienen soll?

Aufg. 129. Wie groß muß die Teilung eines Zahnrades gemacht werden, das einen Zahndruck von 500 kgr aufnehmen soll?

Anl. z. L. Bezeichnet man die Teilung mit t (vgl. § 189), so ist die Zahnstärke am Fuße ungefähr $0{,}5\,t$; die Breite des Zahnrades nimmt man gleich $2\,t$ und die Zahnhöhe (mit Rücksicht auf die Sicherheit des Eingriffs) gleich $0{,}7\,t$. Man hat dann den Belastungsfall Fig. 59. Zulässige Zugspannung des Gußeisens 250 kgr pro qcm.

Aufg. 130. An einer schmiedeeisernen Kurbel von 40 cm Länge wird im ungünstigsten Falle eine Kraft von 80 kgr ausgeübt (wenn sich ein Arbeiter darauf legt). Wie groß muß h sein, wenn man $b = \frac{1}{2}h$ wählt?

Fig. 60.



230. Ein Balken trage eine über seine Länge gleichförmig verteilte Last (Fig. 60), z. B. sein eigenes Gewicht. Für jede Längeneinheit betrage die Belastung q kgr. Für irgend einen Querschnitt im Abstande x vom linken Auflager ist dann das Biegungsmoment

$$M = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}.$$

Vergrößert man x, so nimmt M so lange zu, als die Belastung der linken Balkenhälfte kleiner ist als der Auflagerdruck, d. h. bis zur Mitte. Das größte Biegungsmoment ist daher

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

oder halb so groß, als wenn die Belastung in der Mitte konzentriert wäre.

Aufg. 131. In der Balkenlage eines Wohngebäudes liegen die Balken von Mitte zu Mitte 0,9 m entfernt. Die Spannweite beträgt 5 m, die Belastung für jeden qm Grundriß einschließlich der gefährlichsten Verkehrsbelastung 600 kgr, die zulässige Beanspruchung 60 kgr, das Verhältnis der Breite zur Höhe des Balkens 5 : 7; wie stark müssen die Balken gemacht werden?

Aufg. 132. Wie groß darf die Spannweite eines Balkens von 15×20 cm Querschnitt gemacht werden, wenn er nur sein eigenes Gewicht zu tragen hat und das spezif. Gewicht des Holzes 0,8 ist?

Aufg. 133. Über einem Bohlenbelage von 1,2 m Spannweite ruht eine Erdschüttung von 0,9 m Höhe und dem spezif. Gewichte 1,5; wie stark müssen die Bohlen sein?

Aufg. 134. Wie stark muß die in Aufg. 116 erwähnte quadratische Grundplatte der Säule gemacht werden?

231. Wenn der Balken sowohl eine gleichförmig verteilte Belastung als auch einzelne konzentrierte Lasten zu tragen hat, ist das in jedem Querschnitte entstehende Biegungsmoment gleich der Summe der durch die einzelnen Belastungen hervorgerufenen Momente zu setzen.

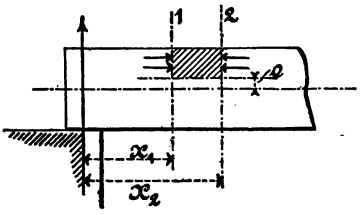
Aufg. 135. In einer einfachen Holzbalkenbrücke von 4 m Spannweite beträgt die Eigenlast der Brücke für den laufenden m jedes Balkens 550 kgr. Dazu kommt im ungünstigsten Falle ein auf die Balkenmitte wirkender Raddruck von 2500 kgr. Wie stark sind die Balken zu wählen?

Anm. Das Verhältnis zwischen Breite und Höhe des rechteckigen Querschnittes eines hölzernen Balkens wird zweckmäßigerweise gleich $1 : \sqrt{2}$ oder ungefähr gleich 5 : 7 genommen, weil das Produkt bh^2 für das so erhaltene Rechteck unter allen, die man in einen gegebenen Kreis einzeichnen kann, den größten Wert annimmt. Der Kreis ist hierbei der Querschnitt des Baumstammes, aus dem der Balken geschnitten wird.

232. Im gebogenen Balken treten (§ 226) auch Schubspannungen auf und zwar nicht nur solche, welche sich über die Querschnittsfläche verteilen und deren Resultierende früher mit T bezeichnet war, sondern auch in den horizontalen Längsschnitten zwischen den einzelnen Fasern. In den gewöhnlich vorkommenden Fällen bleiben diese Spannungen allerdings weit unter der zulässigen Grenze, so daß z. B. bei der Lösung der vorausgegangenen Aufgaben auf dieselben gar keine Rücksicht genommen zu werden brauchte. Manchmal ist aber doch eine Berechnung derselben erforderlich.

Zu diesem Zwecke lege man zwei Querschnitte 1 und 2 (Fig. 61) durch den Balken und einen horizontalen Längsschnitt in der Entfernung e von der Stabachse. Es wird hierdurch der in der Figur schraffiert gezeichnete Teil herausgeschnitten, dessen Gleichgewicht jetzt näher untersucht werden soll. Von den Biegungsmomenten M_1 und M_2 an den beiden Querschnitten 1 und 2 möge M_2 das größere sein. Dann sind in demselben Verhältnisse auch die Druckspannungen, welche auf den Körperteil im Querschnitte 2 übertragen werden, größer als diejenigen auf der anderen Seite. Man erkennt hieraus, daß im horizontalen Längsschnitte Schubspannungen auftreten müssen, deren Pfeil am schraffierten Balkenstücke nach rechts gerichtet ist. Sie werden um so größer, je näher bei der Achse wir den horizontalen Längsschnitt ziehen, denn wenn e abnimmt wächst die Differenz der beiderseitigen Druckspannungen, der die Summe der Scherspannungen nach dem Komponentensatze gleich sein muß.

Fig. 61.



Die in der neutralen Faser auftretende größte Schubspannung t ergiebt sich demnach aus der Gleichung

$$t(x_2 - x_1)b = D_2 - D_1,$$

worin der Wert von D aus § 226 bekannt ist. Nach Einsetzen und Auflösen erhält man

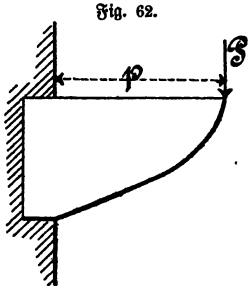
$$t = \frac{3(M_2 - M_1)}{2hb(x_2 - x_1)}.$$

Will man zwei Balken so auf einander legen und verbinden, daß sie sich wie ein einziger Balken von doppelter Höhe verhalten, so muß man sie zur Übertragung der so eben berechneten scherenden Kräfte in ihrer Berührungsfläche befähigen. Dies geschieht durch Ausführung einer Verzahnung oder Verdübelung. Die Berechnung des verzahnten oder verdübelten Balkens hat nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeit. Der Druck auf einen Zahn oder Dübel ist gleich der Differenz der entsprechenden Kräfte D_2 und D_1.

Aufg. 136. Ein verdübelter Balken hat 7 m Spannweite und trägt im ganzen eine gleichförmig verteilte Last von 5600 kgr. Welche Querschnittsdimensionen müssen die beiden Balken erhalten, aus denen er zusammengesetzt ist und wie groß ist der Druck auf einen Dübel, der einer Balkenlänge entspricht, deren linkes Ende 0,7 und deren rechtes $1{,}7_4$ m vom linken Auflager entfernt ist?

233. Ein rechteckiger Balken, welcher überall denselben Querschnitt besitzt, erfährt nur an einer Stelle eine Beanspruchung, welche den zulässigen Wert erreicht. An allen übrigen Stellen steht nichts im Wege, den Querschnitt zu verkleinern. Man kann sich die Aufgabe stellen, den Balken als Körper von gleicher Festigkeit zu konstruieren, so nämlich, daß in jedem Querschnitte die Festigkeit des Materials voll ausgenützt wird.

Fig. 62.



Aufg. 137. Ermittle die Gestalt der unteren Begrenzungslinie eines Kragsteins (Fig. 62), der ein Körper von gleicher Festigkeit sein soll, wenn die Last $P = 400$ kgr, $b = 40$ cm, $p = 50$ cm und die zulässige Zugspannung eines vorzüglichen Steinmaterials $= 2$ kgr pro qcm gesetzt werden kann.

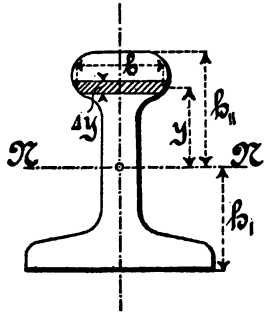
Anm. Die Linie wird eine Parabel. Viele behaupten, daß die Linie gleicher Festigkeit auch die unser Auge am meisten befriedigende oder die schönste sei.

234. Wir betrachten jetzt einen Balken, dessen Querschnitt kein Rechteck ist. Dagegen soll immer noch angenommen werden, daß der Querschnitt eine senkrechte Symmetrieachse besitzt und daß die Richtungslinien der den Balken belastenden Kräfte in die Symmetrieebene fallen.

In den Anwendungen trifft dies zwar nicht immer zu; gewöhnlich wird aber die Rechnung auch in diesen Fällen so durchgeführt, als wenn die genannten Voraussetzungen erfüllt wären. Rechtfertigen läßt sich dies freilich nur damit, daß es bei allen Festigkeitsberechnungen nur auf ungefähre, nicht auf genaue Resultate ankommt. Der mit der Mechanik vertraute Konstrukteur wird eine Anordnung dieser Art stets nach Möglichkeit zu vermeiden suchen.

235. Die allgemeinen Betrachtungen der §§ 225 und 226 gelten auch in dem hier vorliegenden Falle; nur die daraus abgeleiteten Gleichungen sind hier durch andere zu ersetzen. Mit Bezug auf die in Fig. 63 eingeschriebenen Bezeichnungen, wobei NN die Richtung der neutralen Faserschicht des Balkenquerschnittes angiebt, erhält man

Fig. 63.



$$D = \sum_{\text{oben}} b \,.\, \Delta y \,.\, s.$$

Die dem Summenzeichen beigeschriebene Angabe deutet an, daß die Summierung über den oberhalb NN liegenden Teil des Querschnitts auszuführen ist. Für die Spannung s in jeder Lamelle läßt sich setzen

$$s = s_{II} \cdot \frac{y}{h_{II}}.$$

Setzt man dies ein und beachtet, daß s_{II} und h_{II} in jedem Gliede der Summe den gleichen Wert besitzen, so erhält man

$$D = \frac{s_{II}}{h_{II}} \cdot \sum_{\text{oben}} b \,.\, \Delta y \,.\, y.$$

Ebenso wird

$$Z = \frac{s_I}{h_I} \cdot \sum_{\text{unten}} b \,.\, y \,.\, \Delta y,$$

wenn man nur den Absolutwert von y in die Rechnung einführt. Nun ist aber nach § 226

$$\frac{s_I}{h_I} = \frac{s_{II}}{h_{II}} \text{ und } D = Z.$$

Wir erhalten also hier

$$\sum_{\text{oben}} by\Delta y = \sum_{\text{unten}} by\Delta y.$$

Damit ist bewiesen, daß die neutrale Faser durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. (Vgl. § 130.)

236. An die Stelle der Momentengleichung in § 226 tritt hier

$$M = \frac{s_{II}}{h_{II}} \sum_{\text{oben}} by^2\Delta y + \frac{s_I}{h_I} \sum_{\text{unten}} by^2\Delta y = \frac{s_I}{h_I} \sum_{\text{ganz}} by^2\Delta y.$$

Der über den ganzen Querschnitt ausgedehnten Summe

$$\sum by^2\Delta y$$

hat man den Namen „Trägheitsmoment" oder genauer äquatoriales Trägheitsmoment des Querschnitts gegeben. Bezeichnet man dasselbe mit J, so geht die Momentengleichung über in

$$s_I = \frac{M}{J} \cdot h_I; \quad s_{II} = \frac{M}{J} \cdot h_{II}.$$

237. Das Trägheitsmoment kann berechnet werden, sobald der Querschnitt gegeben ist. Entweder zerlegt man denselben in horizontale Lamellen und führt die vorgeschriebene Summierung aus, wodurch man aber nur zu einem angenäherten Werte gelangt. Oder man bildet die Summe auf rein mathematischem Wege (durch Integration). Dies liefert zwar genaue Werte, ist aber nur für regelmäßig gestaltete Querschnitte durchführbar und geht über den hier gesteckten Rahmen hinaus. Es sei nur bemerkt, daß das Trägheitsmoment des Rechtecks sich auf diesem Wege zu $\frac{1}{12}bh^3$ ergiebt. Setzt man dies und $h_1 = \frac{1}{2}h$ in die vorstehende Gleichung ein, so geht dieselbe in die früher (§ 227) für den rechteckigen Querschnitt gefundene über.

Das äquatoriale Trägheitsmoment des Kreises vom Radius r ist gleich $\frac{1}{4}\pi r^4$.

Kann man den gegebenen Querschnitt in eine Summe oder Differenz einfacherer Figuren zerlegen, welche alle dieselbe horizontale Schwerlinie NN haben, so erhält man das Trägheitsmoment durch algebraische Summierung der den einzelnen Teilen entsprechenden Momente.

Aufg. 138. Ermittele das Trägheitsmoment a) eines I-Profils, b) eines konzentrischen Ringes.

238. Das Biegungsmoment, welchem ein Balken mit Sicherheit zu widerstehen vermag, hängt nicht unmittelbar von J, sondern, wie die Formeln des § 236 lehren, von den Werten $\frac{J}{h_1}$ bezw. $\frac{J}{h_2}$ ab. In vielen Fällen sind diese beiden Brüche einander gleich indem der Schwerpunkt in die Hälfte der Höhe des Querprofils fällt. Fast stets trifft dies bei Balken aus Schmiedeeisen oder Stahl zu. Bei diesen Materialien ist nämlich die zulässige Beanspruchung für Zug gleich derjenigen für Druck und man wählt daher zweckmäßiger Weise den Querschnitt so, daß $s_{\text{I}} = s_{\text{II}}$ wird.

Man setzt dann zur Abkürzung

$$W = \frac{J}{h_{\text{I}}} = \frac{J}{h_{\text{II}}}$$

und nennt W das Widerstandsmoment des Querschnittes. Die Biegungsgleichung geht damit über in

$$s_{\text{I}} = s_{\text{II}} = \frac{M}{W}.$$

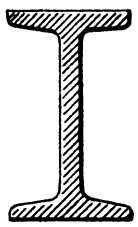
Zuweilen wird der Begriff des Widerstandsmomentes auch auf Querschnitte ausgedehnt, für welche h_{I} von h_{II} verschieden ist. Man hat aber dann zwei verschiedene Widerstandsmomente $\frac{J}{h_{\text{I}}}$ und $\frac{J}{h_{\text{II}}}$ zu unterscheiden. Zweckmäßiger ist es aber, in solchen Fällen nur mit dem Trägheitsmomente zu rechnen.

239. Von den horizontalen Lamellen, in welche sich ein rechteckiger Querschnitt zerlegen läßt, trägt jede um so mehr zum Trägheitsmomente (wie aus dessen Definition hervorgeht) bei, je weiter sie von der horizontalen Schwerlinie entfernt ist. Man kann daher, wo es auf eine Ersparnis von Material ankommt. die nach der Mitte zu gelegenen Schichten fortlassen, ohne dadurch die Widerstandsfähigkeit des Balkens gegen Biegung sehr zu beeinträchtigen. Es ist nur nötig, einen schmalen Steg stehen zu lassen, welcher die Zusammengehörigkeit der ganzen Figur aufrecht erhält und die Scherspannungen (§ 232) aufzunehmen vermag.

Man gelangt so zu dem bei eisernen Balken in der Regel angewendeten I-Profil (Fig. 64). Bei gewalzten Balken ist es aus dem oben (§ 238) angegebenen Grunde symmetrisch auch in Bezug

auf die horizontale Schwerlinie. Gußeisernen Balken giebt man besser ein Profil mit senkrechter Symmetrieachse, dessen horizontale Schwerlinie näher bei dem auf Zug beanspruchten Flantsche liegt und zwar so, daß sich die Abstände h_{I} und h_{II} zu einander verhalten wie die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck (250 : 700). Der Balken wird dann in bezug auf das Verhalten seiner beiden Flantschen ein Körper gleicher Festigkeit.

Fig. 64.



240. Die Hütten, welche sich mit dem Walzen von I-Balken beschäftigen, geben über die von ihnen ausgeführten Profile Preislisten heraus, in denen das Trägheitsmoment und das Widerstandsmoment bereits fertig berechnet angegeben sind. Die Festigkeitsberechnung gestaltet sich daher bei der Verwendung derartiger Balken sehr einfach. Man ermittelt das von ihnen aufzunehmende Biegungsmoment und erhält durch Division mit der zulässigen Beanspruchung das erforderliche Widerstandsmoment; es bleibt dann nur übrig, in der Preisliste einen Balken von geeignetem Profil auszusuchen.

Man hat dabei nur auf die zu Grunde gelegten Einheiten zu achten. Das Trägheitsmoment ist (§ 236) eine Summe von Gliedern, welche durch Multiplikation von vier Längen mit einander entstehen. Ein auf mm bezogenes Trägheitsmoment, wie es in den Preislisten gewöhnlich angegeben ist, wird daher auf cm umgerechnet durch Division mit 10^4 oder 10 000. Einheit des Trägheitsmomentes ist die dritte Potenz der Längeneinheit (§ 238); man rechnet daher von mm auf cm um durch Division mit 1000.

Selbstverständlich müssen auch die Hebelarme bei der Berechnung des Biegungsmomentes auf dieselbe Längeneinheit bezogen werden wie s und W; es empfiehlt sich, bei Festigkeitsrechnungen ein für alle Mal in cm zu rechnen.

Aufg. 139. In einem städtischen Wohngebäude sollen drei neben einander liegende I-Balken ein Schaufenster überdecken. Die Spannweite beträgt 2,4 m, die von den Balken aufzunehmende Last entspricht einem Mauerkörper von 64 cm Stärke und 15 m Höhe (wobei die von den Fußböden und dem Dache herrührende Last dadurch berücksichtigt ist, daß die Fensteröffnungen voll gerechnet werden und die Mauer bis oben hin in derselben Stärke in Rechnung gestellt wird). Wenn man wegen des Fehlens größerer Erschütterungen und

von Spannungswechseln die zulässige Beanspruchung zu 1000 kgr wählt, wie groß muß das Widerstandsmoment der I-Balken sein?

Aufg. 140. Die stärksten I-Balken, welche sich bequem durch Walzen herstellen lassen, haben ungefähr 40 cm Höhe und ein Widerstandsmoment von 1200 cm^3. Wie groß darf die Spannweite einer mit ihnen herzustellenden Brücke sein, wenn eine gleichförmig verteilte Belastung von 500 kgr pro laufenden m und in der Mitte eine isolierte Last von 5000 kgr (Straßenwalze) auf jeden Balken entfällt? (Zulässige Beanspr. = 700.)

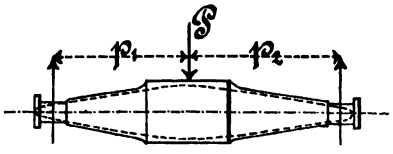
Aufg. 141. Wie groß muß das Trägheitsmoment einer Eisenbahnschiene von 13 cm Höhe aus Cementstahl (zulässige Beanspr. = 1200 kgr) sein, wenn die Schwellen 90 cm Abstand von Mitte zu Mitte haben und der größte Raddruck 7000 kgr beträgt?

Aufg. 142. Wie stark muß eine schmiedeeiserne Reckstange von 1,5 m Spannweite genommen werden, wenn als größte Last in der Mitte 100 kgr angenommen wird, die aber mit Rücksicht auf die stoßweise Beanspruchung doppelt in die Rechnung einzuführen ist?

Aufg. 143. Für den Durchmesser eines schmiedeeisernen Zapfens soll eine Formel $d = \alpha \sqrt[3]{P}$ angegeben werden, wo P den Zapfendruck in kgr, d den Durchmesser in cm angiebt. Wie groß ist α zu setzen, wenn die Länge des Zapfens a) $= 1{,}2\,d$, b) $= 1{,}5\,d$ genommen wird? (P ist am äußersten Zapfenende wirkend zu denken.)

241. Die im Maschinenbau häufig vorkommenden Tragachsen (Fig. 65) sind auf Biegung beanspruchte Balken von kreisförmigem Querschnitte. Man konstruiert dieselben ungefähr als Körper gleicher Festigkeit, indem man den Durchmesser an jeder Stelle dem dort auftretenden Biegungsmomente anpaßt. Nachdem man für eine Reihe verschiedener Querschnitte die erforderlichen Stärken berechnet und in die Figur eingetragen hat erhält man durch Verbinden der einzelnen Punkte die punktiert angegebene Linie. Der leichteren Herstellung wegen setzt man aber den äußeren Umriß aus Cylinder- und Kegelflächen zusammen, die sich berührend und möglichst eng an die theoretische Linie anschließen.

Fig. 65.

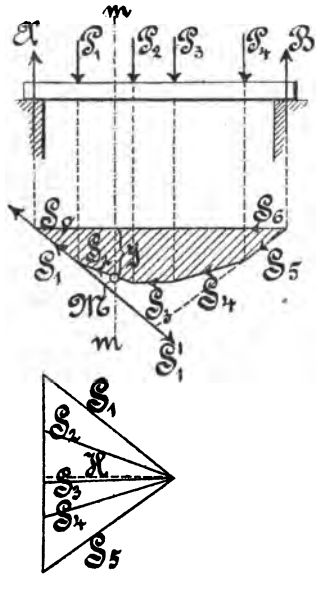


Aufg. 144. Bestimme die Gestalt einer schmiedeeisernen Tragachse, wenn $P = 12\,000$ kgr, $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}8$ m ist.

242. Wenn die Belastung, welche ein Balken erfährt, nicht so einfacher Art ist, als bisher stets vorausgesetzt wurde, bedient man sich mit Vorteil einer graphischen Methode, welche das Biegungsmoment für alle Querschnitte des Balkens durch eine einzige Konstruktion zu ermitteln gestattet.

Man setze nämlich (Fig. 66) die auf dem Balken ruhenden Lasten $P_1 P_2 \ldots$ durch ein Seilpolygon (§ 122) zusammen, indem man S_1 willkürlich wählt und durch Zusammensetzen mit den Lasten der Reihe nach $S_2 \ldots S_5$ konstruiert. Denkt man sich dann S_5 mit B und S_1' (die Gegenkraft von S_1) mit A zusammengesetzt, so müssen die entstehenden Resultierenden S_0 und S_6 im Gleichgewichte stehen und daher in dieselben Gerade fallen; man nennt dieselbe die Schlußlinie des Seilpolygons.

Fig. 66.



Die in der Figur schraffierte Fläche zwischen der Schlußlinie und dem Seilpolygon ist die Momentenfläche. Für irgend einen Querschnitt mm giebt das Produkt aus dem in die Momentenfläche fallenden Stück y der Senkrechten mm und dem Horizontalzuge des Seilpolygons H das Biegungsmoment an.

Der Beweis für diese Behauptung ergiebt sich leicht, wenn man den Punkt M (Fig. 66) zum Momentenpunkte wählt und die Kraft S_0 im oberen Endpunkte von y in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegt.

Aufg. 145. Über eine Balkenbrücke von 8 m Spannweite bewege sich ein Wagen von 5 m Radstand. Konstruiere die Maximalmomentenfläche, wenn jeder Raddruck 5 t beträgt.

Anl. z. L. Man betrachtet eine größere Zahl verschiedener Stellungen des Wagens (8 oder 10 nebst den dazu symmetrisch liegenden) und bestimmt

nach § 242 die Momentenfläche für jede Stellung (kann unter Benutzung eines einzigen Seilpolygons geschehen), trägt sodann alle diese Flächen über einer gemeinsamen Grundlinie auf und zeichnet die Umhüllende.

243. Die excentrische Zug- oder Druckbelastung eines Stabes (§ 222) kann als eine Verbindung einer centrischen Belastung von derselben Größe mit einer Biegungsbelastung angesehen werden. Das Biegungsmoment ist in diesem Falle (Fig. 54a) gleich $P.e$ zu setzen.

Die Schlußformeln des § 222 ergeben sich ohne weiteres, wenn man die Biegungsspannungen für $M = Pe$ nach § 227 ermittelt und sie zu den aus der centrischen Belastung hervorgehenden Spannungen algebraisch summiert.

Wenn der Querschnitt des excentrisch belasteten Stabes kein Rechteck ist, kann die Aufgabe gleichfalls durch eine gesonderte Berechnung der Biegungsspannungen einerseits und der Zug- oder Druckspannungen, welche dem centrischen Angriffe entsprechen, andererseits und algebraische Summierung der gefundenen Werte gelöst werden.

Aufg. 146. Eine Zugstange wird excentrisch belastet, so daß die Excentrizität 2 mm beträgt, während der Durchmesser des Querschnittskreises gleich 30 mm ist. Um wieviel % steigt die Beanspruchung des Materials infolge der Excentrizität?

Aufg. 147. Wie gestaltet sich die Lösung der Aufg. 116, wenn anzunehmen ist, daß die der Säule aufgebürdete Last eine Excentrizität bis zu 2 cm anzunehmen vermag?

Aufg. 148. Ein Schornstein hat an irgend einer Stelle einen ringförmigen Querschnitt von 0,8 m lichtem Durchmesser und 0,25 m Wandstärke. Das Gewicht des darüber lastenden Körpers denke man sich mit dem daran wirkenden Winddrucke (bei heftigem Sturme circa 100 kgr pro qm Fläche des Längsschnittes) zu einer Resultierenden vereinigt. Wie weit darf der Angriffspunkt derselben im betrachteten Querschnitte vom Mittelpunkte entfernt sein? (damit nämlich keine Zugspannungen auftreten, § 223). Ferner wie hoch darf unter diesen Umständen der Schornstein über den Querschnitt hinausgeführt werden, wenn sich das Profil oben nicht ändern soll und das spezif. Gewicht des Mauerwerks = 1,9 gesetzt werden kann, während unterhalb des betrachteten Querschnittes durch Verstärkungen für die Standsicherheit gesorgt ist?

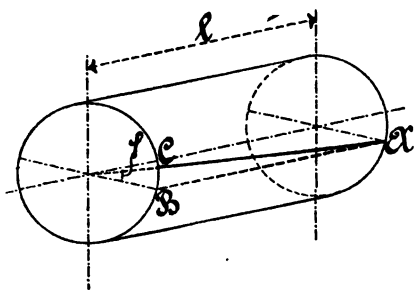
Viertes Kapitel.

Torsions- und Knickfestigkeit.

244. Während in einem gebogenen Stabe in erster Linie Zug- und Druckspannungen, nebenher aber Schubspannungen auftreten, ist es beim *tordierten* Stabe umgekehrt. Hier ist das Material vorwiegend auf Abscheren beansprucht und nur in ganz geringem Grade auf Zug bezw. Druck. Man muß daher bei der Festigkeitsberechnung die Bedingung zu Grunde legen, daß die größte vorkommende Scherspannung die zulässige Grenze nicht überschreitet.

245. Von Bedeutung für die Anwendungen sind fast nur Stäbe von kreis- oder ringförmigem Querschnitte, sog. *Wellen*. Fig. 67 zeigt ein Stück einer tordierten Welle von der Länge l. AB sei vor der Torsion irgend eine Cylindererzeugende. Nach der Verdrehung bilden die auf ihr enthaltenen mat. P. ein Stück AC einer Schraubenlinie von großer Ganghöhe. Der Centriwinkel φ, welcher zum Bogen BC gehört, heißt der *Verdrehungswinkel*.

Fig. 67.



Man sieht unmittelbar ein, daß der Verdrehungswinkel proportional der Länge l des betrachteten Wellenstücks ist; außerdem ist er innerhalb der Elastizitätsgrenze proportional dem auf die Wellenachse bezogenen statischen Momente der verdrehenden Kraft.

246. Aus der geometrischen Beschreibung des Zustandes der verdrehten Welle vermag man leicht auf die hierdurch wachgerufenen Kräfte zu schließen. Bezeichnen wir die am Umfange auftretende Schubspannung mit t_1, den Radius mit r_1 und den Elastizitätsmodul für Schub mit G, so wird nach § 212

$$t_1 = G \cdot \frac{BC}{l} = G \cdot \frac{2\pi r_1}{360} \cdot \frac{\varphi}{l}.$$

Betrachten wir einen näher beim Centrum gelegenen Teil des Querschnitts, so tritt an die Stelle der relativen Verschiebung BC ein entsprechend kleinerer Bogen. Wir erhalten die dort auftretende Scherspannung t, wenn wir an Stelle von r_1 die Entfernung r der betreffenden Stelle vom Centrum setzen. Es folgt daraus, daß

$$t = t_1 \cdot \frac{r}{r_1}.$$

Die ganze Welle sei jetzt durch einen Querschnitt in zwei Teile getrennt, von denen einer näher ins Auge gefaßt werden soll. Die im Querschnitte auf ihn übertragenen inneren Kräfte denke man sich durch gleich große äußere ersetzt; es muß dann von neuem Gleichgewicht zwischen diesen und der am Ende des Wellenteils wirkenden verdrehenden Kraft bestehen. Der Wellenteil mit allen an ihm wirkenden Kräften sei auf eine Ebene projiziert, die senkrecht zur Wellenachse steht und es sei auf diese Projektion der Momentensatz zur Anwendung gebracht.

Die Zug- oder Druckspannungen, welche im Querschnitte übertragen werden, stehen senkrecht zur gewählten Projektionsebene und kommen daher in der Momentengleichung nicht vor. Diese lautet

$$\sum t \cdot \Delta f \cdot r = Pp.$$

Pp ist das Moment der verdrehenden Kraft, Δf irgend ein kleines Stück des Querschnittes, auf das sich die Größen r und t beziehen und die Summierung ist auf den ganzen Querschnitt auszudehnen. Unter Berücksichtigung des für t gefundenen Wertes erhalten wir

$$\frac{t_1}{r_1} \cdot \sum \Delta f r^2 = Pp.$$

Der hier stehende Summenausdruck gleicht dem in § 236 gefundenen. Er wird wie jener ein Trägheitsmoment, zur Unterscheidung aber ein polares Trägheitsmoment genannt. Schreibt man dafür J_p, so wird

$$t_1 = r_1 \cdot \frac{Pp}{J_p}.$$

247. Lehrsatz. Das polare Trägheitsmoment ist gleich der Summe der äquatorealen Trägheitsmomente in bezug auf zwei zu

einander senkrechte Schwerlinien. (Beweis auf Grund des Pythagoräischen Satzes.)

Sind die beiden äquatorealen Momente gleich groß, so ist das polare Trägheitsmoment demnach doppelt so groß als eines derselben. Für den Kreis wird $J_p = \frac{1}{2}\pi r^4$ (vgl. § 237).

Aufg. 149. Eine (schmiedeeiserne) Welle (zulässige Scherbeanspruchung 525 kgr pro qcm) wird durch ein Zahnrad von 70 cm Radius und 450 kgr Zahndruck in Umdrehung versetzt; wie stark muß sie gemacht werden?

Aufg. 150. Wie stark muß eine Welle sein, die 12 Pferdekräfte überträgt und 100 Umdrehungen in der Minute macht?

Anl. z. L. Bei einer Umdrehung leistet die verdrehende Kraft die Arbeit $2Pp\pi$; diese ist aber nach den gemachten Angaben bekannt (§ 91); man findet also Pp und damit die gesuchte Lösung nach der Schlußformel des § 246.

Aufg. 151. Eine gußeiserne Welle (zulässige Scherbeanspr. = 190 kgr pro qcm) von ringförmigem Querschnitt und 25 mm Wandstärke soll einem verdrehenden Momente von 2000 mkgr widerstehen; wie groß muß der äußere Durchmesser sein?

248. Die elastische Formänderung einer Welle kann schon dann sehr störend werden, wenn die inneren Kräfte noch ziemlich weit unter der zulässigen Grenze liegen. Aus § 245 folgt bereits, daß dieses „Federn" der Wellen sich besonders bei sehr langen Wellenleitungen bemerklich machen muß. Man verlangt gewöhnlich, daß der Verdrehungswinkel φ einer Transmissionswelle $\frac{1}{4}^0$ nicht übersteigen soll. Die Berechnung dieses Winkels in Graden ergiebt sich ohne weiteres aus der ersten Formel des § 246.

Aufg. 152. Wie lang darf die in Aufg. 150 erwähnte Welle gemacht werden, ohne daß eine Verstärkung erforderlich wird? ($\varphi = \frac{1}{4}^0$; $G = 750\,000$ kgr pro qcm.)

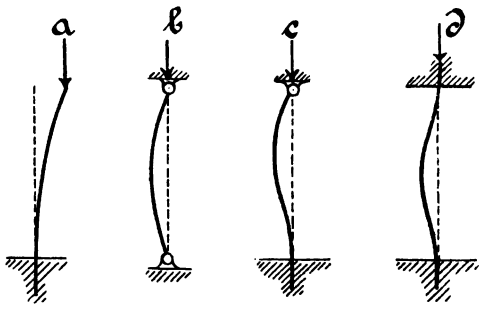
Aufg. 153. Wenn die Welle dagegen länger gemacht wird, nach welcher Formel ist sie zu berechnen?

Anl. z. L. Man eliminiere aus der ersten und letzten Gl. des § 246 den Wert t_1 und löse nach r_1 auf.

249. Knickfestigkeit. Man unterscheidet vier verschiedene Fälle, die durch die Fig. 68a—d zur Darstellung gebracht sind. Am häufigsten kommt der zweite derselben in den Anwendungen vor; er ist auch in Fig. 48f zu Grunde gelegt. Die anderen drei Fälle

lassen sich auf ihn zurückführen. Im ersten Falle nämlich, bei dem die Fußtangente des Stabes durch die Einmauerung senkrecht erhalten wird, während das Kopfende sich in horizontaler Richtung frei verschieben kann, läßt sich die elastische Linie nach eingetretener Biegung direkt vergleichen mit der oberen Hälfte derjenigen in Fig. 68b. Bezeichnet man also die Stablänge in Fig. 68a mit L, in Fig. 68b mit l, so verhalten sich beide Stäbe gleichartig, wenn $L = \frac{1}{2} l$ ist. In Fig. 68c ist die horizontale Verschieblichkeit des oberen Stabendes aufgehoben, dagegen vermag es sich gelenkartig um den Befestigungspunkt zu drehen. Hier läßt sich das obere Drittel vergleichen mit der oberen Hälfte von Fig. 68b und für $L = 1\frac{1}{2} l$ sind beide Stäbe in gleicher Lage. Ebenso muß im vierten Falle $L = 2l$ gesetzt werden, um ihn auf den zweiten zurückzuführen.

Fig. 68a—d.



Es genügt demnach, den zweiten Fall näher ins Auge zu fassen. Überdies berechnet man Stäbe selbst dann, wenn eine Einspannung der Enden nach Fig. 68c oder d wirklich erfolgt, gewöhnlich ohne darauf Rücksicht zu nehmen, also so als ob der zweite Fall vorliegen würde, weil es meistens kaum möglich ist, die Verbindung an den Enden so starr herzustellen, daß jede kleine Drehung ausgeschlossen wäre.

Fig. 69.

250. Ein Stab unter dem Einflusse einer centrischen Druckbelastung hat zunächst keine Veranlassung zu einer seitlichen Ausbiegung. Sobald aber einmal auf irgend eine zufällige Veranlassung hin, an der es im Laufe der Zeit niemals fehlen wird, eine geringe Durchbiegung eingetreten ist, bringt die Last P für jeden Querschnitt ein Biegungsmoment Py hervor (Fig. 69), das die eingetretene Biegung aufrecht zu erhalten oder zu vergrößern sucht. Es fragt sich nur, ob

dieses Biegungsmoment groß genug ist, um eine Krümmung des Stabes von der betreffenden Größe hervorzurufen. Offenbar hängt dies in erster Linie von der Größe der Kraft P ab.

Euler (geb. 1707, gest. 1783) hat auf dem Wege der höheren Rechnung bewiesen, daß die Kraft

$$P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

in welcher Formel die Buchstaben die von früher bekannte Bedeutung besitzen, gerade hinreicht, um eine geringe dem Stabe erteilte Krümmung aufrecht zu erhalten. Diese Krümmung wächst sehr rasch und führt den Bruch herbei, wenn P nur wenig über den angegebenen Wert hinausgeht. Dagegen nimmt der Stab vollständig wieder die gerade Gestalt an, wenn P unter jenem Werte bleibt.

251. Die Last, welche ein Stab mit Sicherheit tragen kann, ist ein gewisser Bruchteil des aus der vorausgehenden Formel bestimmten Wertes von P. Gewöhnlich sieht man für Schmiedeeisen oder Stahl $^1/_5$, für Gußeisen $^1/_6$, für Holz $^1/_{10}$ jenes Wertes von P als zulässige Belastung an.

Selbstverständlich ist für J das kleinste (äquatoreale) Trägheitsmoment des Querschnittes einzusetzen, da der Stab nach jener Seite ausknicken wird, auf welcher der Biegung der geringste Widerstand entgegenwirkt. Man wird indessen so weit als möglich Stäben, die der Zerknickungsgefahr ausgesetzt sind, einen Querschnitt geben, der für jede Schwerlinie dasselbe Trägheitsmoment besitzt, also einen Kreis, einen Kreisring, ein Quadrat, regelmäßiges Polygon u. s. w.

252. Um einen Körper gleicher Festigkeit wenigstens näherungsweise zu erhalten, giebt man dem Stabe häufig in der Mitte eine größere Stärke als nach den Enden zu. So wird z. B. die Kurbelstange einer Dampfmaschine gewöhnlich durch zwei abgestumpfte Kegelflächen umgrenzt, deren größere Basisflächen in der Mitte zusammenstoßen. Die Stange hat dann dieselbe Sicherheit gegen Zerknicken, als wenn sie überall den größten Querschnitt aufweisen würde.

Aufg. 154. Wie stark muß die schmiedeeiserne Kurbelstange

einer Dampfmaschine gemacht werden, wenn sie 1,50 m lang ist und einen Dampfdruck von 3000 kgr zu übertragen hat?

Anm. Die geringste Stärke (an den Enden) ergiebt sich aus der Bedingung, daß die spezifische Druckspannung den zulässigen Wert nicht übersteigen darf.

Aufg. 155. Ein hölzerner Pfosten ($E = 120\,000$ kgr pro qcm) von quadratischem Querschnitte und 6 m Höhe soll eine Last von 8000 kgr tragen. Wie groß muß die Seite des Querschnitts sein?

Aufg. 156. Wie gestaltet sich die Lösung der Aufg. 116, wenn die Höhe der Säule 8 m beträgt, unter Annahme a) des Falles Fig. 68b, b) des Falles Fig. 68d?

Aufg. 157. Wie lang darf ein auf Druck beanspruchtes Flacheisen von 20×80 mm Querschnitt sein, ohne daß die Gefahr des Zerknickens diejenige der Zerstörung durch Druck übersteigt?

Tabellen.

a) Spezifische Gewichte.

Eisen, chemisch rein	7,79
Gußeisen, weiß	7,5
„ grau	7,1
Stabeisen	7,6—7,8
Eisendraht	7,6—7,75
Gußstahl	7,83—7,92
Gold, gehämmert	19,30—19,35
Kupferdraht	8,8—9,0
Messing, gegossen	8,4—8,7
Platin	21,5
Silber, gehämmert	10,5—10,6
Blei	11,3—11,4
Mauerwerk:	
Bruchsteine	2,46
Granit	2,6
Sandstein	2,1
Ziegelstein	1,5—1,7
Sand, trocken	1,4—1,6
Kies	1,8

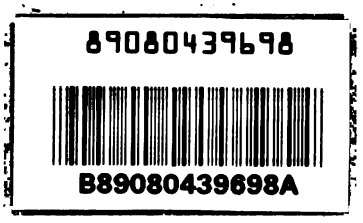
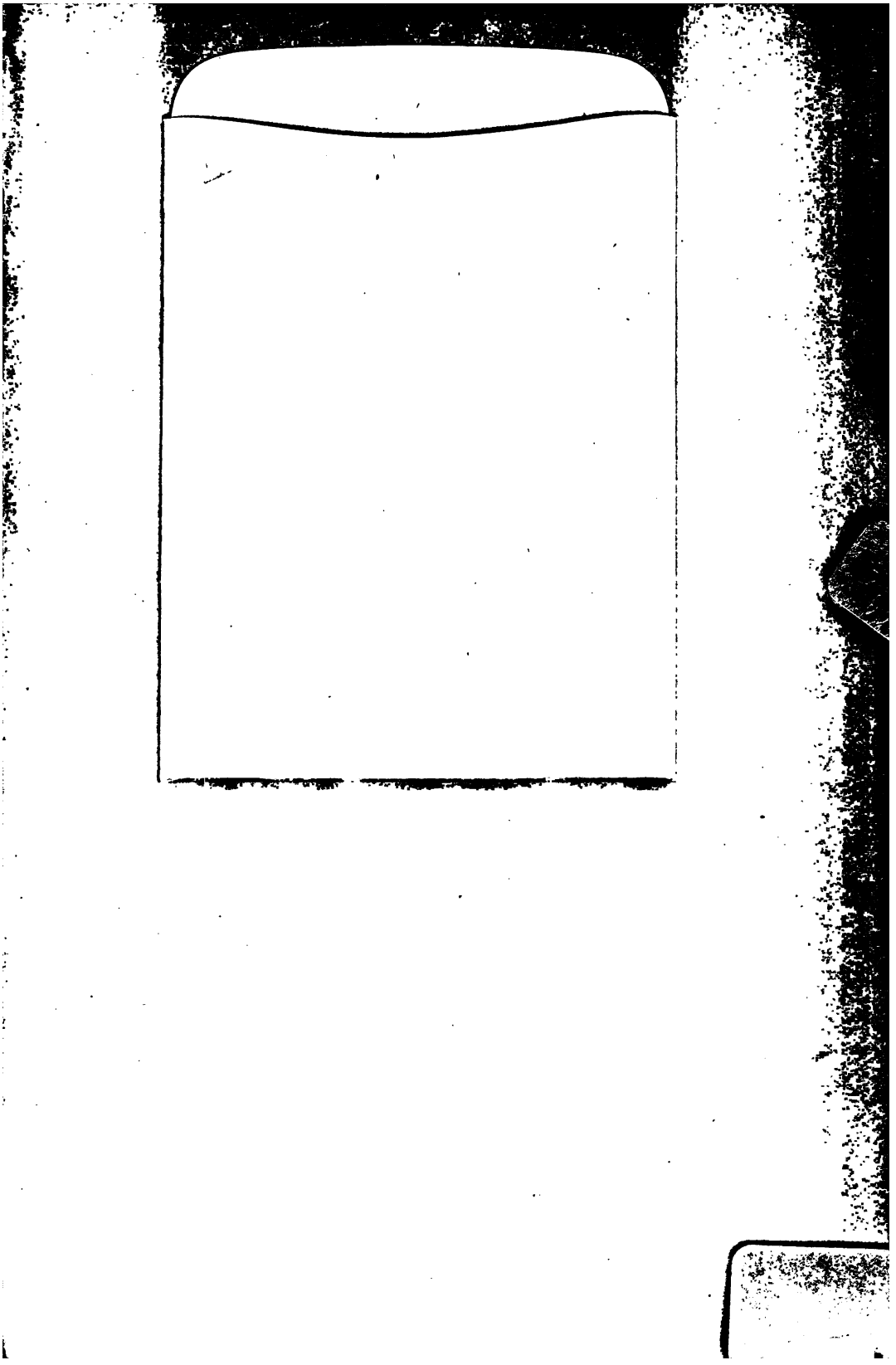
Holz:	luftrocken,	frisch
Eiche	0,92	0,97
Fichte	0,43	0,89
Kiefer	0,61	0,91
Nußbaum	0,73	0,88
Pockholz	1,33	—
Fensterglas	2,65	
Steinkohlen, ohne Zwischenräume	1,2—1,5	
Eis	0,88	
Schnee	0,125	
Flüssigkeiten:		
Quecksilber	13,59	
Schwefelsäure (66° B.)	1,84	
Petroleum	0,84	
Seewasser	1,029	
Olivenöl	0,92	
Terpentinöl	0,87	

b) Reibungscoefizienten für gleitende Reibung.

Bronze auf Bronze	0,20
Gußeisen auf Gußeisen oder Bronze, wenig gefettet	0,15
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen, trocken	0,44
" " " wenig gefettet, Reibung der Ruhe	0,13
Gußeisen auf Eiche, naß, Reibung der Ruhe	0,65
" " " mit Seife, Bewegung	0,19
Eiche auf Eiche, mit Seife	0,16
" " " trocken, Reibung der Ruhe	0,54—0,62
Hanfseil auf Eiche, Ruhe	0,80
" " " Bewegung	0,52
Lederriemen auf Gußeisen, Ruhe	0,28
Schmiedeeisen auf Muschelkalk, Ruhe	0,42
Zapfenreibung bei ununterbrochener Schmierung	0,045—0,054

c) Festigkeitscoeffizienten bezogen auf kgr pro qcm.

Material.	Bruchbelastung.			Elastizitätsmodul.		Elastizitätsgrenze für Zug und Druck.
	Zug.	Druck.	Schub.	Zug u. Druck.	Schub.	
Stabeisen	3800	3500	3500	2 000 000	750 000	1400
Eisendraht	5600	—	—	2 000 000	750 000	—
Gußeisen	1250	7500	2000	1 000 000	375 000	900
Gußstahl	6000—10 000	—	—	2 500 000	900 000	3000—6500
Kupferblech	2100	4100	—	1 070 000	400 000	300
Kupferdraht	4200	—	—	1 210 000	—	1000
Blei	130	500	—	50 000	18 750	100
Eichenholz, parallel z. Faser	1100	660	79	117 000	8000	200
Dass. ⊥ z. Faser	50	350	—	—	—	—
Kiefernholz ∥ z. Faser	1130	450	42	120 000	7000	140
Dass. ⊥ z. Faser	48	220	—	—	—	—


89080439698
B89080439698A